

# 模态逻辑 II

(MODAL LOGIC II)

北大逻辑与谜题课 王彦晶



不能只考虑世界的现实情况!



欢迎来到可能世界的世界!



# 图景





## (命题) 模态逻辑的形式语言

命题逻辑语言 + 模态词 = 命题模态逻辑语言

- 小写英文字母  $p, q \dots$  是命题逻辑语言中的原子公式。
- 如果  $A$  和  $B$  都是公式，那  $(A \wedge B)$  也是公式 ( $A$  且  $B$ )。
- 如果  $A$  和  $B$  都是公式，那  $(A \vee B)$  也是公式 ( $A$  或  $B$ )。
- 如果  $A$  是公式，那  $\neg A$  也是公式 (并非  $A$ )。
- 如果  $A$  和  $B$  都是公式，那  $(A \rightarrow B)$  也是公式。
- 如果  $A$  是公式，那么  $\Box A$ ,  $\Diamond A$  也是公式。
- 如果一串符号不能通过上面的规则生成，则它不是公式。

$\Box$  读 “Box”，在基本的模态逻辑中代表 “必然”、“永远”、“知道”、“必须” 等， $\Diamond$  读 “Diamond”，代表 “可能”、“有时”、“允许” 等...不同领域也把  $\Box$  写成不同的东西:  $\mathcal{K}_i$  ( $i$  的知识),  $\mathcal{G}$  (永远)...  
 $\Box A$ ,  $\Diamond A$  的真值不完全由  $A$  的真值决定，**不是**命题连接词。



# 可能世界语义 (Possible-world semantics)

一个克里普克模型 (Kripke Model)  $\mathcal{M}$  由三个东西组成  $\langle W, R, V \rangle$ :

- $W$  是一个非空集合 (一堆可能世界或者可能的状态).
- $R$  是  $W$  上的一个可达关系 (accessibility relation) ( $wRv$  表示如果现实世界是  $w$  那么  $v$  是它的一个可能的替代世界)
- $V$  一个函数确定可能世界上哪些原子命题为真哪些为假. 换句话说,  $V$  给每个世界一个真值表.

满足关系  $\models$  定义在点模型 (pointed model) 上  $\mathcal{M}, w$  (模型 + 一个“真实世界”), 只有在确定一个世界后才能确定所有公式的真假:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \models p &\Leftrightarrow p \in V(w) \\ \mathcal{M}, w \models \neg A &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models A \\ \mathcal{M}, w \models (A \wedge B) &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models A \text{ 且 } \mathcal{M}, w \models B \\ \mathcal{M}, w \models \Box A &\Leftrightarrow \text{对所有的 } v, \text{ 如果 } wRv \text{ 则 } \mathcal{M}, v \models A\end{aligned}$$

一个框架 (frame)  $\langle W, R \rangle$ , 就是没有赋值  $V$  的模型.



# 泥孩谜题 (MUDDY CHILDREN)





人脑容易烧坏, 需要靠谱的推理工具.





更多知识谜题

群体知识

哲学原则与数学性质的对应

模态逻辑的证明系统和应用

其他模态逻辑



# 女孩的生日

- 艾伯特和柏纳刚认识谢丽尔，想要知道谢丽尔的生日，谢丽尔列出了十个可能的日期：5月15日、5月16日、5月19日、6月17日、6月18日、7月14日、7月16日、8月14日、8月15日、8月17日
- 接着谢丽尔分别告诉艾伯特及柏纳她生日的月及日，以下是艾伯特和柏纳的对话。
- 艾伯特：我不知道谢丽尔的生日是哪一天，但我知道你也不知道
- 柏纳：一开始我不知道谢丽尔的生日，但现在我知道了
- 艾伯特：那我也知道谢丽尔的生日了
- 请问谢丽尔的生日是那一天？



# 纸牌加密

- 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 中 B 和 C 分别被秘密的发了三张牌, 而 E 拿走 剩下的牌.
- 问题: B 和 C 有没有可能通过公开的 (保证真实的) 宣告使得互相都知道对方的牌是什么, 但同时 E 还是不知道任何一张不在手里的牌的归属?



# 一个可行的策略

根据手里的牌属于哪个情况，说下面对应的析取式

- $P_{A0} : 012\ 036\ 045\ 134\ 156\ 235\ 246$
- $P_{A1} : 013\ 025\ 046\ 126\ 145\ 234\ 356$
- $P_{A2} : 014\ 026\ 035\ 136\ 245$
- $P_{A3} : 015\ 024\ 123\ 256\ 346$
- $P_{A4} : 016\ 034\ 124\ 135\ 236\ 456$
- $P_{A5} : 023\ 056\ 125\ 146\ 345$



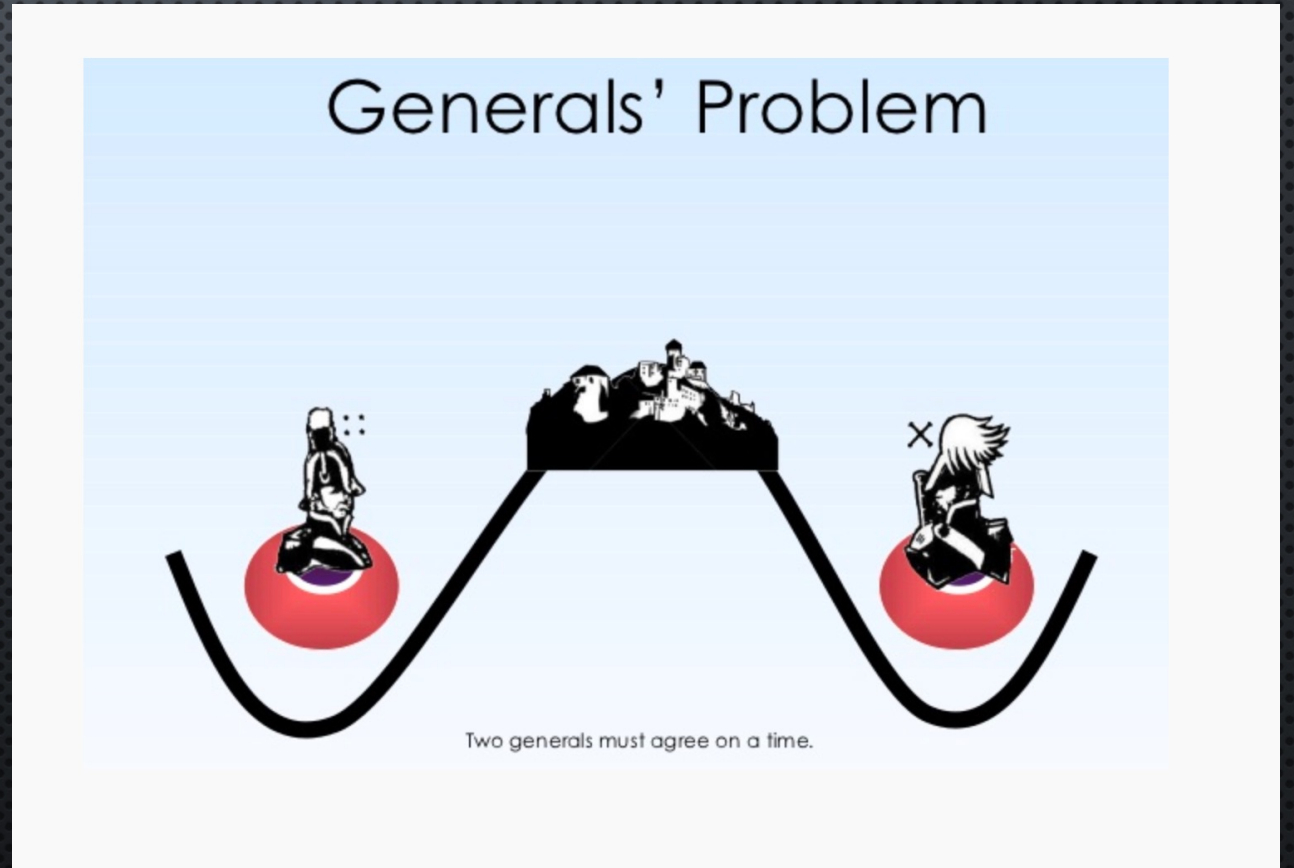
## 人口普查(不光需要逻辑)

- 在玩泥巴事件之后, 一个人口普查员去那个逻辑学家家里调查情况:
- 逻辑学家: “我们家三个小孩的年龄加起来是我的门牌号, 乘起来是 72。”
- 普查员看了一眼门牌号, 想了一会说: “我还是不知道你孩子 都是多大啊。”
- 逻辑学家: “哦对了, 我忘了说我们家老大喜欢在玩泥巴之后喝加糖的豆腐脑。”
- 这时人口普查员恍然大悟说 “那我终于知道了!”
- 问: 逻辑学家的小孩各多大?



# 群体知识

- 公共知识 (COMMON KNOWLEDGE)
- 分布式知识





# 连续数

X 和 Y 分别被告知两个相连的自然数中的一个 (这也是公共知识)

X: 我不知道你的数

Y: 我也不知道你的数

X: 我知道你的数了

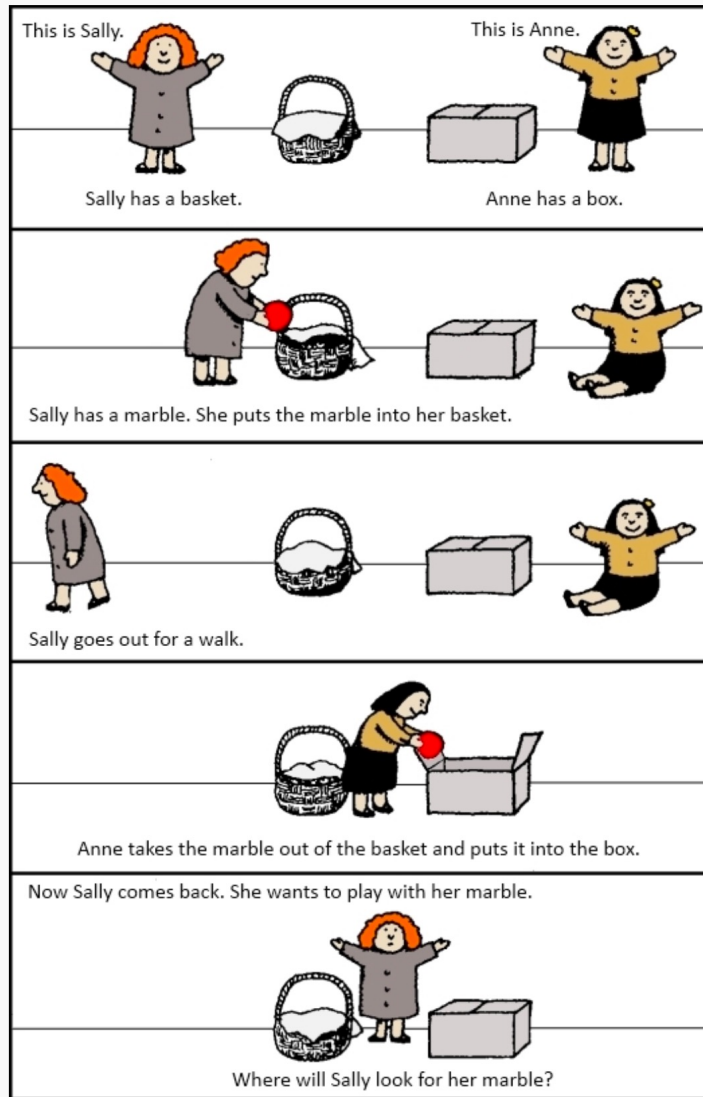
Y: 我也知道你的数了

请问你能知道其中的一个数么?

另外, 这两个数的和小于1000万是不是公共知识?



# Theory of mind (心理理论) 理解别人的错误信念



Baron-Cohen, Leslie and Frith  
(1985)

## A. Director Present



I. Dumontheil et al. (2010)  
“把大球往上拿一格!” 到底拿  
哪个要看是谁说的