

# 模态逻辑 I

(MODAL LOGIC I)

北大逻辑与谜题课 王彦晶

很多“如果 那么”解释成实质蕴涵会有“怪论”

一种更强的“如果 那么”：

严格蕴涵 必然的  $A \rightarrow B$

那“必然”又是什么？

不能只考虑世界的现实情况!



欢迎来到可能世界的世界!

# 模态逻辑: 不止必然

- 他测了核酸.
- “他测了核酸” 为真的不同 “模式” (用模态词表达):
  - 可能 他测了核酸.
  - 昨天 他测了核酸.
  - 我知道 他测了核酸.
  - 他被允许 测了核酸.
  - 他被证明 测了核酸.
  - 他在跑了 3 个检测点后 测了核酸

# 图景



谜题

模态逻辑的形式语言

可能世界模型和语义

再来几个谜题

# 泥孩谜题 (MUDDY CHILDREN)



人脑容易烧坏, 需要靠谱的推理工具.





## 泥孩谜题

三个小孩  $a, b, c$  在门口玩，他们的脸上有可能会不小心弄上了泥巴，不过他们只能看到别人脸上有没有泥巴，而不知道自己脸上有没有泥巴。他们的老爸（一位逻辑学家）出门看到孩子们玩的脏兮兮的很生气，他说：“你们中间有人把泥巴弄到脸上了！”

- 接着他命令：“知道自己脸上有泥巴的给我站出来！”
- $a$  站出来了， $b$  和  $c$  没有动

请问都谁脸上有泥巴？（假设虎父无犬子）



三个小孩  $a, b, c$  在门口玩,  $a$  和  $b$  的脸上不小心弄上了泥巴, 不过他们只能看到别人脸上有没有泥巴, 而不知道自己脸上有没有泥巴。他们的老爸 (一位逻辑学家) 出门看到孩子们玩的脏兮兮的很生气, 他说: “你们中间有人把泥巴弄到脸上了!”

- 接着他命令: “知道自己脸上有泥巴的给我站出来!”
- 没人动。
- 老爸继续命令道: “知道自己脸上有泥巴的给我站出来!”
- 这时候  $a$  和  $b$  都站出来了,  $c$  没有动。

这是为什么? “高阶” 的知识推理很重要.



三个小孩  $a, b, c$  在门口玩，他们的脸上都弄上了泥巴，不过他们只能看到别人脸上有泥巴，而不知道自己脸上有没有泥巴。他们的老爸（一位逻辑学家）出门看到孩子们玩的脏兮兮的很生气，他说：“你们中间有人把泥巴弄到脸上了！”

- 接着他命令：“知道自己脸上有泥巴的给我站出来！”
- 没人站出来。他重复道：“知道自己脸上有泥巴的站出来！”
- 还是没人站出来，他最后又大声说了一遍：“现在知道自己脸上有泥巴的给我站出来！”

突然，三个小孩都齐刷刷的站出来了。这是为什么？

更一般的，如果一共  $n$  个小孩里面有  $k$  个脸上有泥巴呢？

# 帽子谜题

- 5 顶帽子的三顶是红色，两顶是白色，A B C戴了三顶：
- 问A你知道你的帽子是什么颜色么？
- A 不知道
- 问B你知道你的帽子颜色是什么么？
- B 不知道
- 问C你知道你的帽子颜色么？
- C 我知道了
- C 先生的帽子是什么颜色？