模态逻辑 (Modal Logic) I

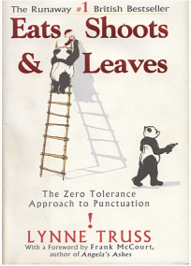
逻辑导论

王彦晶
北大哲学系

2023 年 5 月 15 日

疫情、自然语言、逻辑

- 在 X 区工作且在 X 区居住的，在 X 区工作但不在 X 区居住的，不在 X 区工作但在 X 区居住的，未来三天都要足不出户。在 X 区工作或者在 X 区生活的人，未来三天都要足不出户。
- 最近没去过 X 区或Y 区的不用查验 48 小时核酸。最近没去过 X 区和Y 区的不用查验 48 小时核酸。
- 曾在过去三天去过 X 超市、健康宝弹窗的人请向社区报备。如果健康宝弹窗了，请在 12 点来测核酸。



疫情、自然语言、逻辑

- 如果他昨天下午去过那个超市，也有可能感染病毒.
- 如果你今天 10 点前不做核酸，明天肯定不能入校.
- 疫情期间这样做, 必然会触犯法律.
- 弹窗 x 的居民不可以在社区测核酸，必须在定点医院检测.
- 如果你明知自己是密接但故意隐瞒，是要追究刑事责任的.
- 如果我们的模型是准确的，世界终将在明年走出疫情.
- 应检尽检, 应收尽收, 应考尽考
- 非必要不离校.

需要精确的形式语言和有效的推理规则

模态逻辑研究关于这些“模态词”的推理, 我们要深入命题内部。

如果他这两天没测核酸，则健康宝必然会弹窗。($\varphi \to \psi$)

并非(健康宝必然会弹窗)。($\neg\psi$)

(?) 他这两天测了核酸。($\neg\varphi$)

文学锋老师《模态逻辑教程》一个例子的疫情版本。

需要精确的形式语言和有效的推理规则

公务员考题:

假设不可能所有的证人都说实话，那么下列哪个命题必然为真?

- A 所有证人一定都不说实话
- B 有的证人说实话
- C 有的证人不说实话
- D 所有的证人都说实话

背景

模态逻辑的形式语言

模态逻辑的形式语义

模态逻辑们的公理系统

模态逻辑的元定理

背景

亚里士多德的模态三段论

Barbara 的 LXL 模态版本 (亚里士多德认为有效)

- 所有 B 都必然是 A
- 所有 C 都是 B
- 所以: 所有 C 都必然是 A

Barbara 的 XLL 版本 (亚里士多德认为不有效):

- 所有 B 都是 A,
- 所有 C 都必然是 B,
- 所以: 所有 C 都必然是 A

模态逻辑的现代起源: 实质蕴含 "怪论"

$p \to q$ 等价于 $\neg p \vee q$ 等价于 $\neg(p \wedge \neg q)$. 实质蕴含 "怪论":

- $p \to (q \to p)$
- $(p \to q) \vee (q \to r)$
- $\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$
- $(p \wedge \neg p) \to q$, $p \to (q \vee \neg q)$

如果意大利是法国的一部分的话, 罗马就在法国 (真?) vs.如果意大利是法国的一部分的话, 北京就在法国 (假?). 似乎有时候蕴含的真值不完全由前件及后件的真值决定! (之后会讲非经典逻辑)

C. I. Lewis (C. 刘) 提出 "严格蕴含" ($p \dashv\!\!3\, q$): 不可能(p 真而 q 假). 等价的: 必然(若 p 真则 q 也真):必然 ($p \to q$)). 必然 p 可以定义为 $\neg p \dashv\!\!3 \bot$.

不能完全解决上面的所有怪论, 但却引出了一个重要的新领域: 模态逻辑 (Modal Logic).

通过严格蕴涵, 充分必要条件的一种模态理解

回忆: 如果把充分必要条件理解成两个方向的实质蕴含，则团结不是胜利的充分条件且团结也不是胜利的必要条件 不一致

$(p \to q) \vee (q \to p)$ 是重言式, $\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to p)$ 是矛盾式。

如果把充分必要条件理解成严格蕴含 (必然的实质蕴涵), $(p \prec q) \vee (q \prec p)$ 不有效。

什么是 “模态”(Modality)

他测了核酸.

“他测了核酸” 为真的不同 “模式”(用模态词表达):

- <u>可能</u> 他测了核酸.
- <u>昨天</u> 他测了核酸.
- <u>我知道</u> 他测了核酸
- 他<u>被允许</u> 测了核酸.
- 他<u>被证明</u> 测了核酸.
- 他<u>在跑了 3 个检测点后</u> 测了核酸

什么是 “模态”(Modality)

他测了核酸.

“他测了核酸” 为真的不同 “模式”(用模态词表达):

- 可能 他测了核酸. (基本模态逻辑 Alethic Modal Logic)
- 昨天 他测了核酸. (时态逻辑 Temporal Logic)
- 我知道 他测了核酸. (知识逻辑 Epistemic Logic)
- 他被允许 测了核酸. (道义逻辑 Deontic Logic)
- 他被证明 测了核酸. (可证性逻辑 Provability Logic)
- 他在跑了 3 个检测点后 测了核酸.(动态逻辑 Dynamic Logic)

广泛应用于哲学, 理论计算机科学, AI, 语言学等学科 (下节课).

模态逻辑的形式语言

模态逻辑的语言

- 命题逻辑语言 + 模态词 = 命题模态逻辑语言
- 一阶逻辑语言 + 模态词 = 一阶模态逻辑语言

这两节课主要讲命题模态语言。

盒子与钻石: (经典) 命题模态逻辑的语言

给定命题字母的集合 P，最基本的命题模态逻辑语言可定义为:

$$\varphi \quad ::= \quad \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \Box\varphi$$

定义 $\bot$ 为 $\neg\top$, 定义 $\varphi \vee \psi$ 为 $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, 定义 $\varphi \to \psi$ 为 $\neg\varphi \vee \psi$.

- $\Box$ 读 “Box”, 在基本的模态逻辑中代表 “必然”
- 可以定义 “可能 φ” 为 “并非必然并非 φ” ($\neg\Box\neg\varphi$), 记做 $\Diamond\varphi$, 读作 “Diamond”. “钻石是并非永远并非”
- 不同领域也把 $\Box$ 写成不同的东西: $\mathcal{K}$ (知识), $\mathcal{B}$ (信念), $\mathcal{G}$ (永远), $\mathcal{O}$ (应该), $[\pi]$ (程序 π 保证)....

$\Box p$ 的真值不完全由 p 的真值决定，不是 $\neg$ 这样的一元连接词.

模态语言的特点

- 元语言概念拿到对象语言精确说
- 与逻辑联结词组合：
  $\neg\Diamond p, \Diamond p \wedge \Diamond\neg p, \Box p \vee \Box\neg p, p \wedge \neg\Box p, \Box p \wedge \neg p$
- 模态词可以任意叠置组合
  - $p \to \Box\Diamond p$, $\Box p \to \Box\Box p$, $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$, $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
  - $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$
- 对偶算子: $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$，很多模态词都有自然的对偶。
- 有很多语言及其变种:
  - 多个模态词
  - 多元模态词
  - 有结构的模态词

有较大的自由度，可以按需构造。

从自然语言到模态语言

“你只吃了 1 个馒头 (p) 则必然 你吃的馒头少于 2 个 (q)”

这句话应该用哪个模态逻辑公式表示? $p \to \Box q$还是 $\Box(p \to q)$?

宽辖域（wide scope）vs. 窄辖域（narrow scope）.

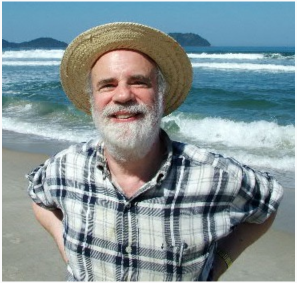
“如果他昨天没测核酸，则健康宝必然会弹窗”

“如果别人有困难，你应该提供帮助”

模态和量词的结合带来更多自然语言翻译的有趣问题.

模态逻辑的形式语义

克里普克 (Saul Kripke): 1940-2022



六岁时开始自学古希伯来语；九岁通读莎士比亚的作品，小学毕业前他就已经相当了解笛卡尔的理论，且展现了极高的数学天赋。克里普克在高中时给出了模态逻辑的可能世界语义并证明完全性结果，投稿接收后被哈佛 (在不知情的情况下) 邀请担任教职，据传其婉拒回复说 “我妈说我最好先上完高中和大学再说”。

image source: Wikipedia

可能世界语义 (Possible-world semantics)

一个克里普克模型 (Kripke Model) $\mathcal{M}$ 由三个东西组成 $\langle W, R, V\rangle$:

- W 是一个非空集合 (一堆可能世界或者可能的状态).
- R 是 W 上的一个可达关系 (accessibility relation) (wRv 表示如果现实世界是 w 那么 v 是它的一个可能的替代世界)
- $V : W \to \mathcal{P}(\mathrm{P})$ 确定可能世界上哪些基本命题为真哪些为假. 换句话说, V 给每个世界一个真值表.

满足关系 $\vDash$ 定义在点模型(pointed model) 上 $\mathcal{M}, w$ (模型 + 一个 "真实世界"), 只有在确定一个世界后才能确定所有公式的真假:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \vDash \top & \Leftrightarrow & \text{永真} \\
\mathcal{M}, w \vDash p & \Leftrightarrow & p \in V(w) \\
\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \nvDash \varphi \\
\mathcal{M}, w \vDash (\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ 且} \mathcal{M}, w \vDash \psi \\
\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi & \Leftrightarrow & \text{对所有的} v, \text{ 如果} wRv \text{ 则} \mathcal{M}, v \vDash \varphi
\end{array}
$$

例子

$$\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\neg\varphi \iff \text{存在} v : wRv \text{ 且} \mathcal{M}, v \vDash \varphi$$

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Diamond\neg\varphi$$

$$\mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \Diamond\neg\varphi$$

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box\neg\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Diamond\varphi$$

如下模型中哪些地方 $\Box\Diamond p$ 为真? 哪些地方 $\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Box p$ 为真?

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[d] & \{p\} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{q\} \arrow[r] & \{p, q\}
\end{tikzcd}$$

克里普克模型是一种关系模型

关系模型可以用来刻画各种各样的东西, 例如:

- 数学里: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ 等等
- 哲学里: 各种关于可能性的模型
- 理论计算机: 状态转换系统 (labelled transition systems).
- 博弈论: 扩展博弈树 (extensive-form games).
- 语言学: 句法结构树 (parsing trees).

有效性 (validity) 和框架 (frame): 不同层次的有效性

框架: 没有赋值函数 V 的模型 $\langle W, R\rangle$ (模型的骨架). 我们希望逻辑真理与基本命题的内容无关, 所以可以考虑框架上有效的公式.

记法 (用 $\mathcal{F}$ 表示框架, 用 $\mathbb{C}$ 表示某些框架的类):

记法	定义	说法
$\mathcal{M}, w \vDash \varphi$		φ 在点模型 $\mathcal{M}, w$ 上为真
$\mathcal{M} \vDash \varphi$	对所有 w: $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$	φ 在模型 $\mathcal{M}$ 上有效
$\mathcal{F}, w \vDash \varphi$	对所有 V: $\mathcal{F}, V, w \vDash \varphi$	φ 在点框架 $\mathcal{F}, w$ 上有效
$\mathcal{F} \vDash \varphi$	对所有 V, 所有 w: $\mathcal{F}, V, w \vDash \varphi$	φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效
$\mathbb{C} \vDash \varphi$	对所有 $\mathbb{C}$ 中的框架 $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \vDash \varphi$	φ 在 $\mathbb{C}$ 上有效
$\vDash \varphi$	对所有框架 $\mathcal{F} \vDash \varphi$	φ有效

实质蕴含与严格蕴含

令 $\varphi \multimap \psi$ 为 $\Box(\varphi \to \psi)$ 实质蕴含 "怪论" 是否对严格蕴含也成立?

- $p \multimap (q \multimap p)$, i.e. $\Box(p \to \Box(q \to p))$不有效
- $(p \multimap q) \vee (q \multimap r)$ 不有效
- $\neg(p \multimap q) \multimap (p \wedge \neg q)$不有效
- $(p \wedge \neg p) \multimap q$, $p \multimap (q \vee \neg q)$ 还是有效的...

相干逻辑 (Relevance Logic) 可以更进一步的处理这些怪论 (要求前件和后件有语形的关系). 属于非经典逻辑的范畴.

数学性质与公式在有效性上的对应

实际上，我们通常会考虑具有特定性质的模型和框架. 我们说 φ 对应于框架性质 X, 如果对任意框架 $\mathcal{F}$:

φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 有性质 X.

公式	框架性质
$\Box p \to p$	自反性: $\forall x Rxx$
$\neg\Box\bot$	持续性: $\forall x \exists y Rxy$
$p \to \Box\Diamond p$	对称性: $\forall x \forall y Rxy \to Ryx$
$\Box p \to \Box\Box p$	传递性: $\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$
$\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$	稠密性: $\forall x \forall y \forall z (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$
$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$	合流性: $\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Rxz \to \exists t (Ryt \wedge Rzt))$
$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	传递且没有无穷下降链

这些对应是连接哲学与数学的桥梁。

模态逻辑们的公理系统

模态逻辑推理系统

- 取决于使用的公理，不是一个统一的逻辑，而是很多个
- 自然演绎系统应用于模态逻辑有不少困难
- 矢列演算系统（还有 labelled, display calculi ）

我们主要讲公理系统，可以清楚的看到不同模态逻辑间的关系。

正规模态逻辑的极小系统 K: 基本公理 (模式) 和规则

- 命题逻辑的公理
- K 公理 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.
- 必然化规则 从 φ 得到 $\Box\varphi$.
- 分离规则 从 $\varphi \to \psi$ 及 φ 得到 ψ.

注意，在做带前提的推演 ($\Gamma \vdash \varphi$) 的时候，必然化规则只能用在可证的公式上，所以从前提 p 得到 $\Box p$ 是不行的。直观上讲 $\Gamma \vdash \varphi$ 说的是: 假设 Γ 里的东西都是真的，能推出 φ.

因而，必然化规则也经常写做: 从 $\vdash \varphi$ 得到 $\vdash \Box\varphi$.

极小系统 K 的一个 (简化) 证明

$$\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \wedge \Box q$$

1	$\vdash p \wedge q \rightarrow p$		命题重言式
2	$\vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p)$		必然化规则
3	$\vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$		K 公理特例
4	$\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$		分离规则 (4,2)
5	$\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$		类似 1-4
6	$\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$		命题逻辑重言式

如何证明如下的内定理?

$$\vdash (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$$

需要精确的形式语言和有效的推理规则

如果他这两天没测核酸，则健康宝必然会弹窗。

并非(健康宝必然会弹窗)。

(?) 他这两天测了核酸。

$\nvdash (\Box(p \to q) \wedge \neg\Box q) \to \neg p$

我们可以导出一些有用的可靠的规则，比如说从 $\vdash \varphi \to \psi$ 得到 $\vdash \Box\varphi \to \Box\psi$ 及 $\vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$.

我们更关心在极小的模态逻辑上再加上新的公理得到的逻辑.

模态逻辑的一些重要公理 (可把 p 换成任意 φ 变成公理模式)

同一个公式在不同的模态解释下会有不同意义, 下面列举一些.

- T $\Box p \to p$ 必然的都是真的
- B $p \to \Box\Diamond p$ $(p \to \Box\neg\Box\neg p)$ 来源于布劳威尔 (Brouwer)
- D $\Box p \to \Diamond p$ 必然都可能/必须意味着允许
- 4 $\Box p \to \Box\Box p$ 永远意味着永远永远/知道你知道的
- 5 $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ 你相信你不相信什么
- L $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ Löb 定理的模态形式 (可证性逻辑)
- .3 $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p)$ 未来不分叉

同一条公理可以在很多不同的语境下都有意义，也能看到很多不同概念间的共性。

不同的模态逻辑证明系统

基于不同的公理有不同的证明系统:

- **T** : K+T 公理模式
- **B** : K+B 公理模式
- **D** : K+D 公理模式
- **S4** : K+T+4
- **S5** : K+T+4+5=K+T+5=K+T+B+4 (推理能力一样)

可以像数学理论一样写哲学理论的公理，然后看他们能推出什么样的结果，可以比较不同理论的强度和相对的一致性。

下次课可以通过一个例子来熟悉模态逻辑的语言、语义和推理系统。

模态逻辑的元定理

可靠性和完全性

定义语义上的后承关系：
$\Gamma \vDash \varphi$ iff 对所有点模型$\mathcal{M}, w$, 如果 $\mathcal{M}, w \vDash \Gamma$ 则 $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$.

我们可以证明对于基本 K 系统的可靠性和完全性:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{K}} \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi$$

完全性证明: 还是对每个一致的公式集造个模型出来: 用所有极大一致集作为可能世界, 在它们之间用语形的信息构造 R 关系:
$\Gamma R \Delta \iff$ 对所有 $\Box\varphi \in \Gamma$ 都有 $\varphi \in \Delta$.

思想: 应有尽有，应联尽连

系统中加上新的公理，很多时候可以找到相应的框架类，得到可靠性及完全性的结果。

例如, 令 $\mathbb{C}_{ref,trans}$ 为自反传递框架的类, 我们有:

$$\Gamma \vDash_{\mathbb{C}_{ref,trans}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathsf{S4}} \varphi$$

在完全性证明中, 还是造模型, 但是要保证造出来的模型的框架在我们想要的类里面 (具有我们想要的性质), 很多时候可以用公理去做这一点, 但也有模态逻辑对任何框架类都不可能即是可靠又是完全的。

其他元定理

- Hennessey-Milner 定理
- Van Benthem-Rosen 刻画定理
- Modal Lindström 定理
- Goldblatt-Thomason 定理
- ...

下节课: 结合一个例子讲讲模态逻辑的应用

谜语

猜模态逻辑公式:

- 订婚礼物盒子装
- 无需过度包装