无穷问题

丁一峰

2023 年春季学期

北京大学哲学系

芝诺悖论

> If there are many, they must be as many as they are and neither more nor less than that. But if they are as many as they are, they would be limited. If there are many, things that are are unlimited. For there are always others between the things that are, and again others between those, and so the things that are are unlimited. (Simplicius(a) On Aristotle's Physics, 140.29)

芝诺悖论

> The first asserts the non-existence of motion on the ground that that which is in locomotion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal. (Aristotle Physics, 239b11)

芝诺悖论

> The [second] argument was called “Achilles,” accordingly, from the fact that Achilles was taken [as a character] in it, and the argument says that it is impossible for him to overtake the tortoise when pursuing it.
>
> And thus in every time in which what is pursuing will traverse the [interval] which what is fleeing, being slower, has already advanced, what is fleeing will also advance some amount. (Simplicius(b) On Aristotle’s Physics, 1014.10)

伽利略

- Simplicio：线段有长有短，较长的线段似乎比较短的线段包含更多的点。但任何线段都包含无穷的点。我想象不出来无穷之间如何比较大小。
- Salvati：平方数明显比自然数少。但是平方数和平方根一样多，而平方根和自然数又一样多，所以平方数和自然数一样多。
- Sagredo：那我们怎么办呢?
- Salvati：无穷之间不能比较大小。

无穷集合的大小比较

令 A 和 B 是两类东西。为了比较这两类的大小，我们有两种基本直观：

- 如果 A 包含了所有 B 里面的东西，而且还有更多，那么 A 里面有“更多”的东西。
- 如果存在一种将 A 里面的东西和 B 里面的东西一一对应起来的方法，那么 A 和 B 里面有同样多的东西。

如果 A 和 B 至少有一个是有穷的，那上面两个要求可以同时满足。但对于无穷的情况，我们必须要做出选择。

希尔伯特旅馆

每个自然数对应一间房，一开始住满了人。

- 来了 1 个人。
- 来了 10^{100} 个人。
- 来了一辆坐满了的大巴，其中每个自然数对应一个座位。
- 来了一列坐满了的火车，其中每个自然数对应一节车厢，每节车厢内每个自然数对应一个座位。
- 每个自然数对应一个元宇宙，每个宇宙都送来了一辆火车。。。

$\mathbb{N}$ 是全体自然数构成的集合。

定义

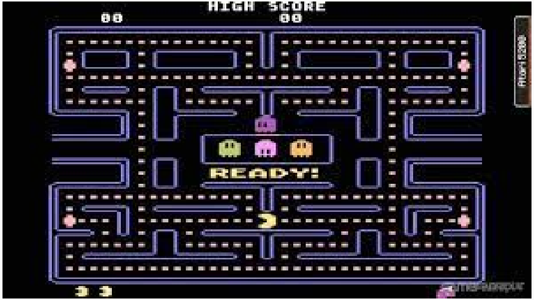
我们称一个集合 A 是可数的，如果 A 里面的东西可以恰好住满希尔伯特旅馆（也就是能够用自然数恰好数完，也就是“以某种方式”和 $\mathbb{N}$ 里面的东西呈一一对应)。

观察

全体整数构成的集合 $\mathbb{Z}$，有理数构成的集合 $\mathbb{Q}$，平面上的有理点集 $\mathbb{Q}^2$，都是可数的。

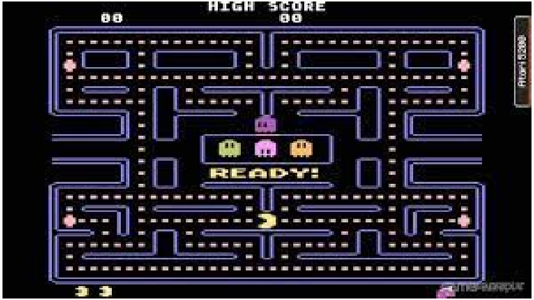
命题逻辑的公式是可数的。如果我们允许的非逻辑符号的数量是可数的，那一阶逻辑的公式也是可数的。

无穷吃豆人



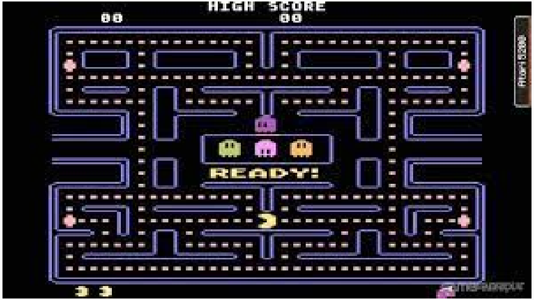
游戏有自然数那么多回合。在每一回合，你可以在桌上添加任意有穷数量的豆，然后吃豆人选择桌上的某一颗豆吃掉。当全部回合结束后，桌上如果没有豆了，则吃豆人获胜。

无穷吃豆人



游戏有自然数那么多回合。在每一回合，你可以在桌上添加任意可数数量的豆，然后吃豆人选择桌上的某一颗豆吃掉。当全部回合结束后，桌上如果没有豆了，则吃豆人获胜。

无穷吃豆人



你的箱子里总共有可数多颗互相可区分的豆。在每一回合，你从箱子里拿出一些放在桌上，然后吃豆人选择桌上的某一颗豆吃掉。吃豆人记性不好，不会记得桌上的豆是在哪一回合被你放上去的。

康托定理

定理

无穷 01 序列的集合不可数。

所有无穷 01 序列构成的集合 $2^{\mathbb{N}}$ 和所有只包含自然数的集合构成的集合 $\wp(\mathbb{N})$ 呈自然的一一对应。

这意味着如果我们可以独立地抛可数多次硬币，所有可能世界里的我放在一起无法安排进希尔伯特旅馆。

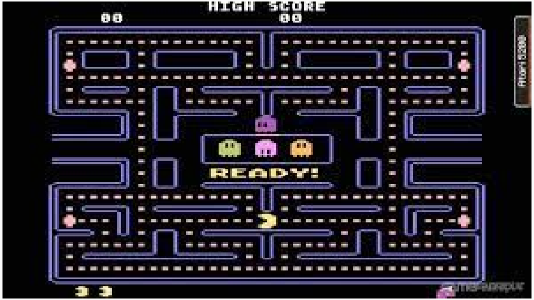
定理

全体实数构成的集合 $\mathbb{R}$，可数维空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，全体从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数构成的集合 C 都和 $\wp(\mathbb{N})$ 具有一一对应。

康托定理

一定存在一个不可计算的实数：所有可能的计算方法放在一起时可数的，而实数不可数。

无穷吃豆人



你的箱子里总共有 $\mathbb{R}$ 那么多颗互相可区分的豆。在每一回合，你从箱子里拿出有穷多颗放在桌上，然后吃豆人选择桌上的某一颗豆吃掉。吃豆人记性不好，不会记得桌上的豆是在哪一回合被你放上去的。

一般形式的康托定理

定理

对任意集合 A，不存在 A 与 $\wp(A)$ 之间的一一对应。

这意味着如果我们使用一一对应来比较集合的大小，那么 $\wp(A)$ 严格地比 A 大。

于是 $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp(\mathbb{N})) \prec \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))) \prec \cdots$。

这还没完，因为我们可以定义一个集合 $\wp^{\omega}(\mathbb{N})$ 收集所有那些出现在上面序列中的某一个集合中的东西。

$\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp(\mathbb{N})) \prec \cdots \prec \wp^{\omega}(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp^{\omega}(\mathbb{N})) \prec \cdots$

康托的连续统问题

既然 $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$，那是不是存在一个中间的大小?

是否存在一个 $\mathbb{R}$ 的部分 A 使得 $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$?

关于无穷的认识论

我们如何认识无穷?

如果实际上不存在无穷怎么办?

关于无穷的认识论

我们通过包含“无穷”概念的一阶逻辑理论来研究无穷。

对于“有穷主义者”，我们试着告诉他们“无穷”仅仅是帮助我们发现和缩短证明的工具。任何对“无穷”集合的使用最终都可以被消除掉。

皮亚诺算术系统

每个自然数都是有穷的。让我们考虑一个只谈论自然数的一阶理论。

（一阶）皮亚诺算术系统

所谓自然数就是从 0 开始不停 $+1$ 能够得到的东西。

考虑有一个常量 0，一个一元函数符号 S 和两个二元函数符号 $+, \times$ 的一阶逻辑语言。

直观上我们希望 $S(x)$ 是 x 的下一个自然数，$+, \times$ 是自然数上的加法和乘法。

（一阶）皮亚诺算术系统

如下句子的真是明显的：

- $\forall x(S(x) \neq 0)$
- $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow S(x) \neq S(y))$
- $\forall x(x+0=x)$
- $\forall x \forall y(x+S(y)=S(x+y))$
- $\forall x(x \times 0=0)$
- $\forall x \forall y(x \times S(y)=(x \times y)+x)$

（一阶）皮亚诺算术系统

所谓自然数就是从 0 开始不停 +1 能够得到的东西。

数学归纳法

$$\left(\varphi(0) \wedge \forall z\left(\varphi(z) \rightarrow \varphi(S(z))\right)\right) \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

归纳法触及不到的东西就不算自然数了。

一阶皮亚诺算术系统，简写为 PA，就是由之前六条公理加上所有的数学归纳法公理组成的公式集。

PA 的重要性

PA 的公理简洁明了，但其实数学强度充足：

- “所有发表在《数学年刊》上的只涉及有穷数学对象的定理都能在初等函数算数 EFA 中被证明。EFA 是 PA 的一个弱片段...”

但遗憾的是，有不少命题我们直观上认为是真的，但 PA 无法证明。这些命题的真某种意义上严格地依赖于我们对“无穷”的直观。

一个经典例子

我们可以很简单地将一阶逻辑的语言和证明系统算术化。此时，我们可以写一个 PA 公式 $Proves(x,y)$ 其直观含义是："x 是 y 的一个证明"。

此时，PA 的一致性，也即 $0=1$ 的不可证性，就可以写成公式 $\forall x \neg Proves(x, \mathrm{code}(0=1))$。

哥德尔第二不完全性定理

如果 PA 是一致的，那么 PA 无法证明 PA 的一致性。事实上，任何一致的关于自然数的可以公理化的理论都无法证明其自身的一致性。

我们目前允许讨论任意无穷大的最流行的理论叫 ZFC：Zermelo-Fraenkel set theory with Choice。

这个理论只关心集合，通过集合的嵌套来编码自然数以及所有数学对象。

这个理论可以轻易的证明 PA 的一致性。但它同样也不能证明其自身的一致性。

我们历史上在建立关于无穷的理论的时候确实制造过不一致性。

考虑这样一条公理**模式**：

$$\exists S\left(\text{集合}(S) \land \forall x(\text{属于}(x, S) \leftrightarrow \varphi(x))\right)$$

这是一个关于哪些集合存在的理论假设/公理，我们可以称之为“天真的概括公理”。在一阶逻辑内部严格来说这是无穷多条公理（对每个公式 φ 都有一条)。

罗素悖论

考虑“x 是一个不属于自身的集合”。

将“天真的概括公理”运用在这句话上，我们会得到一个集合 A，其中恰好有那些不属于自身的集合。

- 我们先由否定引入证明 $A \notin A$。
    - 假设 $A \in A$，这说明 A 被概括进 A 集合里面了。所以 $A \notin A$。但这与假设矛盾。
- 于是 $A \notin A$。则 A 是一个不属于自身的集合。则 A 被那句话概括进了 A 里面：$A \in A$。
- 矛盾出现了：我们证明了 $A \in A$ 和 $A \notin A$。

Theorem

不存在一个恰好只给不给自己理发的人理发的人。$\neg\exists x\forall y(R(x,y)\leftrightarrow\neg R(y,y))$。

我们只需要把 $R(x,y)$ 读作“y 属于 x”就得到罗素悖论。

直观上：这个理发师无法决定要不要给自己理发。

同理，我们在使用“是一个不属于自身的集合”这个概念来抓出一个集合的时候，我们无法决定这个被抓出来的集合要不要属于它自己。

罗素悖论的解决方案

我们现在只考虑集合，用 $\in$ 表示“属于”。

分离公理模式（对公式 φ 以及一个不在 φ 中出现的变量 B）

φ 可以在任何集合 A 中挖出一个集合 B 恰好包含 A 中满足 φ 的元素（若让 x 指这个元素则 φ 为真）。

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi))$$

这是我们常见的符号 $\{x \in A \mid \varphi\}$，比如 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ 背后的公理。

不是所有语言都能制造存在，但所有语言都能分裂开已有的存在。

ZFC 的其它公理

外延公理：$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$

结对公理：$\forall a \forall b \exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$

并集公理：$\forall B \exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in B))$

幂集公理：$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in A))$

基础公理：$\forall A (\exists x (x \in A) \rightarrow \exists x (x \in A \wedge \neg \exists y (y \in x \wedge y \in A)))$

无穷公理：$\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall x (x \in I \rightarrow (x \cup \{x\} \in I))$

替换公理模式：$\forall x \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \forall A \exists B (\forall b \in B \exists a \in A \varphi(a, b))$

选择公理：$\forall A ((\forall a, b \in A, a \neq \emptyset \wedge (a \cap b) = \emptyset) \rightarrow \exists g (\forall a \in A \exists ! x \in (g \cap a)))$

ZFC 可以定义标准自然数结构 $(\mathbb{N}, S, +, \times)$，然后定义一个集合其中恰好包含真的 PA 句子。

但 ZFC 无法定义出“真 ZFC 句子”这个集合。

有大量和 ZFC 独立的问题不再是字面上关于 ZFC 本身的。

定理

连续统问题独立于 ZFC。如果 ZFC 是一致的，那么 ZFC 既不能证明存在集合 A 其大小夹在 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 中间，也不能证明这个命题的否定。

这和 ZFC 的一致性问题相对于 ZFC 的独立有着本质的区别。

这最终会回到我们如何解释和接受一阶理论的问题。