计算问题

丁一峰

2023 年春季学期

北京大学哲学系

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)
- 万物理论 (the theory of everything)

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)
- 万物理论 (the theory of everything)
- 博弈论 (theory of games)

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)
- 万物理论 (the theory of everything)
- 博弈论 (theory of games)
- 集体行动的逻辑

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)
- 万物理论 (the theory of everything)
- 博弈论 (theory of games)
- 集体行动的逻辑
- 科学发现的逻辑

逻辑与理论

“逻辑”和“理论”这两个词的常见搭配有微妙的不同：

- 进化论 (theory of evolution)
- 万物理论 (the theory of everything)
- 博弈论 (theory of games)
- 集体行动的逻辑
- 科学发现的逻辑
- 政治的逻辑

一阶逻辑中的理论

日常生活中“xx 的逻辑”在一阶逻辑框架内统统都是“xx 的理论”，因为这些“xx”都不是逻辑连接词：与或非，任意，存在，同一。

一阶逻辑中的理论

日常生活中“xx 的逻辑”在一阶逻辑框架内统统都是“xx 的理论”，因为这些“xx”都不是逻辑连接词：与或非，任意，存在，同一。

定义

一个理论就是一组一阶逻辑句子（集合）。这些句子被称为这个理论的 公理。这些句子用到的非逻辑符号（常量名字，谓词，函数）被称为这个理论的 初始概念。

一阶逻辑中的理论

日常生活中“xx 的逻辑”在一阶逻辑框架内统统都是“xx 的理论”，因为这些“xx”都不是逻辑连接词：与或非，任意，存在，同一。

定义

一个理论就是一组一阶逻辑句子（集合）。这些句子被称为这个理论的 公理。这些句子用到的非逻辑符号（常量名字，谓词，函数）被称为这个理论的 初始概念。

对一个理论 T，如果 $T \vdash \varphi$，我们称 φ 为 T 的定理。定理也可以被称为逻辑后果或理论后果。

一阶逻辑中的理论

日常生活中“xx 的逻辑”在一阶逻辑框架内统统都是“xx 的理论”，因为这些“xx”都不是逻辑连接词：与或非，任意，存在，同一。

定义

一个理论就是一组一阶逻辑句子（集合）。这些句子被称为这个理论的 公理。这些句子用到的非逻辑符号（常量名字，谓词，函数）被称为这个理论的 初始概念。

对一个理论 T，如果 $T \vdash \varphi$，我们称 φ 为 T 的定理。定理也可以被称为逻辑后果或理论后果。

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

其他标准：

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

其他标准：

- 一个好的理论是我们可以理解/把握的：我们可以说所有对这个世界的真描述句子构成的集合已经在那里了，但仅仅这样是不够的。

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

其他标准：

- 一个好的理论是我们可以理解/把握的：我们可以说所有对这个世界的真描述句子构成的集合已经在那里了，但仅仅这样是不够的。
- 一个好的理论的公理都符合我们前理论的直观。

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

其他标准：

- 一个好的理论是我们可以理解/把握的：我们可以说所有对这个世界的真描述句子构成的集合已经在那里了，但仅仅这样是不够的。
- 一个好的理论的公理都符合我们前理论的直观。
- 一个好的理论能回答我们感兴趣的关于它的初始概念的问题。

理论的德性

最低标准：一个好的理论是一致的：$x \neq x$ 不是这个理论的逻辑后果。

其他标准：

- 一个好的理论是我们可以理解/把握的：我们可以说所有对这个世界的真描述句子构成的集合已经在那里了，但仅仅这样是不够的。
- 一个好的理论的公理都符合我们前理论的直观。
- 一个好的理论能回答我们感兴趣的关于它的初始概念的问题。
- 一个好的理论没有多余的东西。

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x,y) \wedge B(y,z)) \to B(x,z))$

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x, y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x, y) \wedge B(y, z)) \rightarrow B(x, z))$
- “不能比自己更好” $\forall x \neg B(x, x)$

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x\forall y\forall z((B(x,y)\wedge B(y,z))\rightarrow B(x,z))$
- “不能比自己更好” $\forall x\neg B(x,x)$
- “比足够好还好当然也足够好” $\forall x(G(x)\rightarrow\forall y(B(y,x)\rightarrow G(y)))$。

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x,y) \wedge B(y,z)) \to B(x,z))$
- “不能比自己更好” $\forall x \neg B(x,x)$
- “比足够好还好当然也足够好” $\forall x(G(x) \to \forall y(B(y,x) \to G(y)))$。

称这个极小的理论为 T。

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x,y) \land B(y,z)) \to B(x,z))$
- “不能比自己更好” $\forall x \neg B(x,x)$
- “比足够好还好当然也足够好” $\forall x(G(x) \to \forall y(B(y,x) \to G(y)))$。

称这个极小的理论为 T。

我们有充分的理由相信这个理论 T 是一致的：$T \nvdash x \neq x$。这是由于这个理论有非常简单的模型，其中只有一个东西，它不比自身更好，也不足够好。

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x,y) \wedge B(y,z)) \to B(x,z))$
- “不能比自己更好” $\forall x \neg B(x,x)$
- “比足够好还好当然也足够好” $\forall x(G(x) \to \forall y(B(y,x) \to G(y)))$。

称这个极小的理论为 T。

我们有充分的理由相信这个理论 T 是一致的：$T \nvdash x \neq x$。这是由于这个理论有非常简单的模型，其中只有一个东西，它不比自身更好，也不足够好。

这个理论有一些有意思的逻辑后果，比如

关于“更好”和“足够好”的理论

用 $B(x,y)$ 表示 x 比 y 更好，$G(x)$ 表示 x 足够好，我们的理论至少包含以下公理：

- “传递性” $\forall x \forall y \forall z((B(x,y) \wedge B(y,z)) \rightarrow B(x,z))$
- “不能比自己更好” $\forall x \neg B(x,x)$
- “比足够好还好当然也足够好” $\forall x(G(x) \rightarrow \forall y(B(y,x) \rightarrow G(y)))$。

称这个极小的理论为 T。

我们有充分的理由相信这个理论 T 是一致的：$T \nvdash x \neq x$。这是由于这个理论有非常简单的模型，其中只有一个东西，它不比自身更好，也不足够好。

这个理论有一些有意思的逻辑后果，比如

- “禁对称”：$\forall x \forall y \neg(B(x,y) \wedge B(y,x))$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”? 除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”？除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”？除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y, x)$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”? 除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y, x)$
- “都好”：$\forall x G(x)$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”? 除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y,x)$
- “都好”：$\forall x G(x)$
- “有的好”：$\exists x G(x)$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T 独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”？除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y, x)$
- “都好”：$\forall x G(x)$
- “有的好”：$\exists x G(x)$
- “可比性”：$\forall x \forall y (x = y \vee B(x, y) \vee B(y, x))$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”? 除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y,x)$
- “都好”：$\forall x G(x)$
- “有的好”：$\exists x G(x)$
- “可比性”：$\forall x \forall y (x = y \vee B(x,y) \vee B(y,x))$
- “抽奖的存在性?”：$\forall x \forall y (B(x,y) \to \exists z (B(x,z) \wedge B(z,y)))$

命题相对于理论的独立性

如果一个理论 T 既不能证明 φ 也不能证明 $\neg\varphi$，我们说 φ 相对于 T独立。

为了证明 φ 相对于 T 的独立性，我们需要

- 一个逻辑上 T 真 φ 假的可能性，以及
- 一个逻辑上 T 真 φ 真的可能性.

什么是“逻辑上”？除了与或非任意存在同一之外别的词的意思都可以换，哪些东西存在也可以换。

有些有意思的一般性命题与这个极小理论独立：

- “只有更好”：$\forall x \exists y B(y,x)$
- “都好”：$\forall x G(x)$
- “有的好”：$\exists x G(x)$
- “可比性”：$\forall x \forall y (x = y \vee B(x,y) \vee B(y,x))$
- “抽奖的存在性?”：$\forall x \forall y (B(x,y) \to \exists z (B(x,z) \wedge B(z,y)))$

T+ “只有更好”

$T' = T \cup \{\forall x \exists y B(y,x)\}$ 只有无穷模型。

换句话说，

T+ “只有更好”

$T' = T \cup \{\forall x \exists y B(y,x)\}$ 只有无穷模型。

换句话说，

- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$

T+ "只有更好"

$T' = T \cup \{\forall x \exists y B(y, x)\}$ 只有无穷模型。

换句话说，

- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$
- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3)$

T+ “只有更好”

$T' = T \cup \{\forall x \exists y B(y,x)\}$ 只有无穷模型。

换句话说，

- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$
- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3)$
- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge x_3 \neq x_4)$

T+ “只有更好”

$T' = T \cup \{\forall x \exists y B(y, x)\}$ 只有无穷模型。

换句话说，

- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$
- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \land x_1 \neq x_3 \land x_2 \neq x_3)$
- $T' \vdash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1 \neq x_2 \land x_1 \neq x_3 \land x_2 \neq x_3 \land x_1 \neq x_4 \land x_2 \neq x_4 \land x_3 \neq x_4)$
- ...

莱布尼兹的理想

“当人们产生争执的时候，我们只需要说：让我们来算一下”

莱布尼兹的理想

“当人们产生争执的时候，我们只需要说：让我们来算一下”

当两个哲学家对是否应当接受一句话产生争议的时候，他们只需要坐下来将这句话形式化到一阶逻辑系统里面然后坐下来算一算这句话是不是他们共同接受的前提的逻辑后果。

莱布尼兹的理想

“当人们产生争执的时候，我们只需要说：让我们来算一下”

当两个哲学家对是否应当接受一句话产生争议的时候，他们只需要坐下来将这句话形式化到一阶逻辑系统里面然后坐下来算一算这句话是不是他们共同接受的前提的逻辑后果。

我们把这些前提放在一起称为一个“理论”。

莱布尼兹的理想

困难：

- 我们根本不应该遵守逻辑

莱布尼兹的理想

困难：

- 我们根本不应该遵守逻辑
- 共同接受的理论太弱以至于明显我们关心的公式是独立的

莱布尼兹的理想

困难：

- 我们根本不应该遵守逻辑
- 共同接受的理论太弱以至于明显我们关心的公式是独立的
- 无法在如何形式化争议句子上找到共识

莱布尼兹的理想

困难：

- 我们根本不应该遵守逻辑
- 共同接受的理论太弱以至于明显我们关心的公式是独立的
- 无法在如何形式化争议句子上找到共识
- 计算不保证能得到结果

莱布尼兹理想的最后一步

为了确定是不是 $T \vdash \varphi$，我们是不是只需要“计算”?

观察

命题逻辑的推理是可计算的。

为了计算是不是 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, 我们考虑计算 $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi)$ 的可满足性。若可满足，则原推理无效，否则原推理有效。

一阶逻辑有很强的表达力。

一阶逻辑

一阶逻辑有很强的表达力。

如果一阶逻辑是可计算的，那我们将获得很多知识。

一阶逻辑

一阶逻辑有很强的表达力。

如果一阶逻辑是可计算的，那我们将获得很多知识。

但反过来这也说明一阶逻辑很难。

希尔伯特

对一阶逻辑的可计算性抱有乐观判断的首推希尔伯特。

希尔伯特

对一阶逻辑的可计算性抱有乐观判断的首推希尔伯特。

希尔伯特: 1862-1943，是当时几乎最有影响力的数学家。

希尔伯特

对一阶逻辑的可计算性抱有乐观判断的首推希尔伯特。

希尔伯特: 1862-1943，是当时几乎最有影响力的数学家。

1900 年他在世界数学家大会上发表了著名的“希尔伯特 23 问题”。

希尔伯特

对一阶逻辑的可计算性抱有乐观判断的首推希尔伯特。

希尔伯特: 1862-1943，是当时几乎最有影响力的数学家。

1900 年他在世界数学家大会上发表了著名的“希尔伯特 23 问题”。

我们必须知道，我们也会知道

一阶逻辑其实不可计算

一阶逻辑的推理其实是不可计算的，这个问题在 1936 年前后有三个人都给出了同样的回答，但图灵的回答是最成功的。

一阶逻辑其实不可计算

一阶逻辑的推理其实是不可计算的，这个问题在 1936 年前后有三个人都给出了同样的回答，但图灵的回答是最成功的。

不过我们在讨论图灵的回答之前还是再看一个可计算的例子。

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

只使用一元谓词的一阶逻辑公式足以形式化亚里士多德的三段论，以及更多：

- 所有企鹅都会飞：$\forall x(P(x) \to Q(x))$

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

只使用一元谓词的一阶逻辑公式足以形式化亚里士多德的三段论，以及更多：

- 所有企鹅都会飞：$\forall x(P(x) \to Q(x))$
- 有的企鹅不会飞：$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

只使用一元谓词的一阶逻辑公式足以形式化亚里士多德的三段论，以及更多：

- 所有企鹅都会飞：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 有的企鹅不会飞：$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$
- 会飞的企鹅都不可爱：$\forall x((P(x) \land Q(x)) \rightarrow \neg C(x))$

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

只使用一元谓词的一阶逻辑公式足以形式化亚里士多德的三段论，以及更多：

- 所有企鹅都会飞：$\forall x(P(x) \to Q(x))$
- 有的企鹅不会飞：$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$
- 会飞的企鹅都不可爱：$\forall x((P(x) \land Q(x)) \to \neg C(x))$
- 要是有一只企鹅会飞，那所有的企鹅都会飞了：
  $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

一阶逻辑的一元片段

我们介绍一下如何计算一个只使用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效的。

只使用一元谓词的一阶逻辑公式足以形式化亚里士多德的三段论，以及更多：

- 所有企鹅都会飞：$\forall x(P(x) \to Q(x))$
- 有的企鹅不会飞：$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$
- 会飞的企鹅都不可爱：$\forall x((P(x) \land Q(x)) \to \neg C(x))$
- 要是有一只企鹅会飞，那所有的企鹅都会飞了：
  $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

为了判断一个只使用“企鹅”，“可爱”的谓词的一阶逻辑句子是不是有效的，我们需要考虑所有逻辑上可能的情况。我们没法画真值表，因为逻辑上似乎有无穷多种可能的情况。

定理

如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 这两个逻辑上可能的情形（“企鹅” - “可爱”语言下的两个结构）对以下四个问题的回答是相同的：

- 有没有可爱的企鹅; 有没有不可爱的企鹅;
- 有没有可爱的非企鹅; 有没有不可爱的非企鹅

也即，如果在 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 上下面这四个句子有相同的真值：

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$; $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
- $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$; $\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

那么随便哪个只使用“企鹅”和“可爱”这两个谓词的一阶逻辑句子在 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 上都有相同的真值。

一阶逻辑的一元片段

由于之前的定理：我们为了判断一个只使用了“企鹅”和“可爱”的一阶逻辑句子是不是有效的，我们只需要考虑 15 个结构：

这几乎就是真值表了。

有穷结构上计算一个一阶逻辑句子的真值

在有穷的结构上，一个一阶句子的真值是可计算的（用多元谓词也没关系），比如 $\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land C(x)))$

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ:

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ：

- 首先列举出 φ 里面使用的一元谓词 $P_1, P_2, \cdots, P_n$

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ：

- 首先列举出 φ 里面使用的一元谓词 $P_1, P_2, \cdots, P_n$
- 考虑这些 $P_1 ... P_n$ 的 2^n 种真假组合 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2^n}$

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ：

- 首先列举出 φ 里面使用的一元谓词 $P_1, P_2, \cdots, P_n$
- 考虑这些 $P_1 ... P_n$ 的 2^n 种真假组合 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2^n}$
- 考虑每一种对所有"有没有 Q_i"这个 2^n 个问题的回答的组合。对每一种回答组合，构造一个相应的一阶逻辑结构，并计算在这个结构上 φ 的真值。

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ：

- 首先列举出 φ 里面使用的一元谓词 $P_1, P_2, \cdots, P_n$
- 考虑这些 $P_1 \ldots P_n$ 的 2^n 种真假组合 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2^n}$
- 考虑每一种对所有“有没有 Q_i”这个 2^n 个问题的回答的组合。对每一种回答组合，构造一个相应的一阶逻辑结构，并计算在这个结构上 φ 的真值。
- 如果在所有 $2^{2^n} - 1$ 种结构上 φ 都为真，则 φ 是有效的。否则 φ 不是有效的。

一般的计算方法

给定一个只用一元谓词的一阶逻辑句子 φ：

- 首先列举出 φ 里面使用的一元谓词 $P_1, P_2, \cdots, P_n$
- 考虑这些 $P_1 \ldots P_n$ 的 2^n 种真假组合 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2^n}$
- 考虑每一种对所有“有没有 Q_i”这个 2^n 个问题的回答的组合。对每一种回答组合，构造一个相应的一阶逻辑结构，并计算在这个结构上 φ 的真值。
- 如果在所有 $2^{2^n}-1$ 种结构上 φ 都为真，则 φ 是有效的。否则 φ 不是有效的。

如果 $n=6$，则我们需要考虑 $2^{2^n}=2^{64}=18,446,744,073,709,551,616$ 个不同的结构。

一阶逻辑的一元片段

定理

判断一个只用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效是一个可计算的问题。由于可靠和完全性以及演绎定理，判断一个只用一元谓词的一阶逻辑公式是不是能从另一个只用一元谓词的一阶逻辑公式逻辑地推出来也是一个可计算的问题。

一阶逻辑的一元片段

定理

判断一个只用一元谓词的一阶逻辑公式是不是有效是一个可计算的问题。由于可靠和完全性以及演绎定理，判断一个只用一元谓词的一阶逻辑公式是不是能从另一个只用一元谓词的一阶逻辑公式逻辑地推出来也是一个可计算的问题。

其实允许等号关于有效性我们也可以计算，此时我们允许的一阶逻辑公式也可以表达“如果有一只可爱的企鹅，那就有十一只可爱的企鹅”。这个定理在 1915 年由 Löwenheim 第一次证明。

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

为了说明一个问题不可计算，我们必须对计算这个概念做整体的理解，也即给出一个数学上精确的计算模型，使得我们可以相信这个计算模型足以计算所有直观上可计算的问题。

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

为了说明一个问题不可计算，我们必须对计算这个概念做整体的理解，也即给出一个数学上精确的计算模型，使得我们可以相信这个计算模型足以计算所有直观上可计算的问题。

在图灵当时还有几个之后被意识到是等价的计算模型：

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

为了说明一个问题不可计算，我们必须对计算这个概念做整体的理解，也即给出一个数学上精确的计算模型，使得我们可以相信这个计算模型足以计算所有直观上可计算的问题。

在图灵当时还有几个之后被意识到是等价的计算模型：

- Church：一般递归函数和 λ 演算

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

为了说明一个问题不可计算，我们必须对计算这个概念做整体的理解，也即给出一个数学上精确的计算模型，使得我们可以相信这个计算模型足以计算所有直观上可计算的问题。

在图灵当时还有几个之后被意识到是等价的计算模型：

- Church：一般递归函数和 λ 演算
- Emil Post：重写系统

图灵对判定问题的回答

图灵的原始文章叫“On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”.

- Computable Numbers
- Entscheidungsproblem

为了说明一个问题不可计算，我们必须对计算这个概念做整体的理解，也即给出一个数学上精确的计算模型，使得我们可以相信这个计算模型足以计算所有直观上可计算的问题。

在图灵当时还有几个之后被意识到是等价的计算模型：

- Church：一般递归函数和 λ 演算
- Emil Post：重写系统

图灵机

图灵机作为计算模型的直观性在于它确实和一个计算中的人非常像。

图灵机

图灵机作为计算模型的直观性在于它确实和一个计算中的人非常像。

我们看一些例子。

图灵机

图灵机作为计算模型的直观性在于它确实和一个计算中的人非常像。

我们看一些例子。

图灵机

我们有什么理由相信图灵机恰好描述了计算的本质?

- The behaviour of the computer at any moment is determined by the symbols which he is observing and his ‘state of mind’ at that moment
- there is a bound B to the number of symbols or squares which the computer can observe at one moment. If he wishes to observe more, he must use successive observations.
- the number of states of mind which need be taken into account is finite
- We may [···] assume that the squares whose symbols are changed are always ‘observed’ squares.
- each of the new observed squares is within L squares of an immediately previously observed square.

通用图灵机

我们可以把计算最一般性地理解为“执行一组给定的指令”。

通用图灵机

我们可以把计算最一般性地理解为“执行一组给定的指令”。

图灵关键一步：计算这个行为本身，也即“执行一组给定的指令”这个过程，是可计算的。

通用图灵机

我们可以把计算最一般性地理解为“执行一组给定的指令”。

图灵关键一步：计算这个行为本身，也即“执行一组给定的指令”这个过程，是可计算的。

我们可以设计一个图灵机，它的任务就是读取你给它的对一个图灵机的描述（代码）$code(T)$ 以及一个输入符号串 i，然后开始模仿/执行 $T(i)$。

通用图灵机

我们可以把计算最一般性地理解为“执行一组给定的指令”。

图灵关键一步：计算这个行为本身，也即“执行一组给定的指令”这个过程，是可计算的。

我们可以设计一个图灵机，它的任务就是读取你给它的对一个图灵机的描述（代码）$code(T)$ 以及一个输入符号串 i，然后开始模仿/执行 $T(i)$。

这样的图灵机被称为通用图灵机。

不可计算问题

图灵想要说明一阶逻辑的有效性/可证性问题是不可计算的。

不可计算问题

图灵想要说明一阶逻辑的有效性/可证性问题是不可计算的。

为此，图灵先找到了一个关于图灵机的不可计算的问题。图灵原文里的不可计算问题是“一个图灵机是不是不停地写下更多的符号”，但现在我们一般会用更容易讨论的“停机问题”：

不可计算问题

图灵想要说明一阶逻辑的有效性/可证性问题是不可计算的。

为此，图灵先找到了一个关于图灵机的不可计算的问题。图灵原文里的不可计算问题是“一个图灵机是不是不停地写下更多的符号”，但现在我们一般会用更容易讨论的“停机问题”：

- 输入：一个图灵机 T 的代码 $code(T)$
- 输出：被描述的图灵机 T 运行在 $code(T)$ 上最后会不会停下来。

停机问题

如果停机问题是可计算的，令计算停机问题的图灵机为 $Halt$。此时我们可以写一个图灵机来执行如下任务：

- 输入：一个图灵机 T 的代码 $code(T)$
- 用计算停机问题的图灵机 $Halt$ 计算 $Halt(code(T))$（也即计算 T 运行在 $code(T)$ 上最会不会停机）
    - 如果 $T(code(T))$ 会停机，则我们进入一个不停地往下一个格子写 1 的循环
    - 如果 $T(code(T))$ 不会停机，则我们立刻停下来。

停机问题

如果停机问题是可计算的，令计算停机问题的图灵机为 $Halt$。此时我们可以写一个图灵机来执行如下任务：

- 输入：一个图灵机 T 的代码 $code(T)$
- 用计算停机问题的图灵机 $Halt$ 计算 $Halt(code(T))$（也即计算 T 运行在 $code(T)$ 上最会不会停机）
  - 如果 $T(code(T))$ 会停机，则我们进入一个不停地往下一个格子写 1 的循环
  - 如果 $T(code(T))$ 不会停机，则我们立刻停下来。

我们把上面这个图灵机记作 L，其代码记作 $code(L)$。问题：$L(code(L))$ 停不停?

一阶逻辑的可计算性问题

我们现在知道了停机问题的不可计算性。

一阶逻辑的可计算性问题

我们现在知道了停机问题的不可计算性。

为了证明一阶逻辑的有效性的不可计算性，我们只需要说明存在一个图灵机来做如下计算：

- 输入：一个图灵机 T 的代码 $code(T)$
- 输出：一个一阶逻辑句子 φ_T 使得 $T(code(T))$ 停机当且仅当 φ_T 是有效的。

一阶逻辑的可计算性问题

我们现在知道了停机问题的不可计算性。

为了证明一阶逻辑的有效性的不可计算性，我们只需要说明存在一个图灵机来做如下计算：

- 输入：一个图灵机 T 的代码 $code(T)$
- 输出：一个一阶逻辑句子 φ_T 使得 $T(code(T))$ 停机当且仅当 φ_T 是有效的。

φ_T 就是把自然语言中的 “T 这个图灵机运行在自己的代码上面会停机” 翻译进一阶逻辑里面。当然这需要使用一些关于自然数的公理，但这些公理也可以写成一阶逻辑句子。

一阶逻辑的可计算性问题

如果一阶逻辑公式的有效性是可计算的，则我们可以把计算一阶逻辑公式有效性的图灵机和上面这个把停机问题转化为有效性判定的问题的图灵机拼起来得到计算停机问题的图灵机。

一阶逻辑的可计算性问题

如果一阶逻辑公式的有效性是可计算的，则我们可以把计算一阶逻辑公式有效性的图灵机和上面这个把停机问题转化为有效性判定的问题的图灵机拼起来得到计算停机问题的图灵机。

但这是不可能的。由于转化问题的图灵机明显存在，计算有效性的图灵机不能存在。

一阶逻辑的可计算性问题

如果一阶逻辑公式的有效性是可计算的，则我们可以把计算一阶逻辑公式有效性的图灵机和上面这个把停机问题转化为有效性判定的问题的图灵机拼起来得到计算停机问题的图灵机。

但这是不可能的。由于转化问题的图灵机明显存在，计算有效性的图灵机不能存在。