一阶逻辑的使用

丁一峰

2023 年春季学期

北京大学哲学系

回顾技术内容

带入自由和自然推演规则中对名字的“新鲜性”的限制都源于一个核心直观：避免不同语境对同一个名字的不同使用的冲突。

回顾技术内容

带入自由和自然推演规则中对名字的“新鲜性”的限制都源于一个核心直观：避免不同语境对同一个名字的不同使用的冲突。

量词改变变量名字的指称（指称可以被量词改变的名字就是变量名字）。

- $\forall x$: 对于随便一个什么东西，让我们暂时称它为 x，...
- $\exists x$: 有这么一个东西，让我们暂时称它为 x，...

回顾技术内容

带入自由和自然推演规则中对名字的“新鲜性”的限制都源于一个核心直观：避免不同语境对同一个名字的不同使用的冲突。

量词改变变量名字的指称（指称可以被量词改变的名字就是变量名字）。

- $\forall x$: 对于随便一个什么东西，让我们暂时称它为 x，...
- $\exists x$: 有这么一个东西，让我们暂时称它为 x，...

“一个人还是要有人爱才好”：$\forall x(\neg\exists y L(y,x) \to \neg H(x))$。

- 哪怕 y 是一个人，从这个句子我们推不出 $\neg\exists y L(y,y) \to \neg H(y)$

回顾技术内容

带入自由和自然推演规则中对名字的“新鲜性”的限制都源于一个核心直观：避免不同语境对同一个名字的不同使用的冲突。

量词改变变量名字的指称（指称可以被量词改变的名字就是变量名字）。

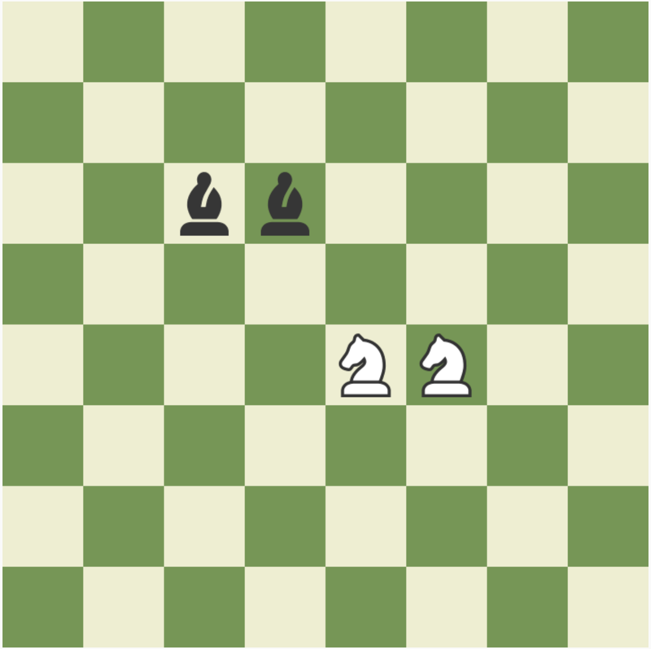
- $\forall x$: 对于随便一个什么东西，让我们暂时称它为 x，...
- $\exists x$: 有这么一个东西，让我们暂时称它为 x，...

“一个人还是要有人爱才好”：$\forall x(\neg\exists y L(y,x) \to \neg H(x))$。

- 哪怕 y 是一个人，从这个句子我们推不出 $\neg\exists y L(y,y) \to \neg H(y)$
- 但我们可以推出 $\neg\exists y L(y,z) \to \neg H(z)$

练习

$$\forall x \exists x (\forall y \exists x (G(x) \rightarrow H(y,x)) \vee R(x,y))$$



$L(x, y)$：x 威胁到 y
$H(x)$：x 是白棋
y 是右下角的马。
此时
一个子不被威胁就不是白棋
$\forall x(\neg\exists y L(y, x) \to \neg H(x))$
但并非
如果没有哪个子威胁自己，那 y 不是白棋 $\neg\exists y L(y, y) \to \neg H(y)$

凭什么说推不出

$\phi \nvdash \psi$ 当且仅当存在一个对函数，谓词，和名字的解释使得在其中 ϕ 为真而 ψ 为假。

凭什么说推不出

$\phi \nvdash \psi$ 当且仅当存在一个对函数，谓词，和名字的解释使得在其中 ϕ 为真而 ψ 为假。

- 这一方面是我们对一个负责刻画关于“存在，任意，与或非”的绝对正确的推理的推演系统的直观要求，

凭什么说推不出

$\phi \nvdash \psi$ 当且仅当存在一个对函数，谓词，和名字的解释使得在其中 ϕ 为真而 ψ 为假。

- 这一方面是我们对一个负责刻画关于“存在，任意，与或非”的绝对正确的推理的推演系统的直观要求，
- 另一方面这也是我们也通过将语言和解释数学化得到的一个技术定理。

凭什么说推不出

$\phi \nvdash \psi$ 当且仅当存在一个对函数，谓词，和名字的解释使得在其中 ϕ 为真而 ψ 为假。

- 这一方面是我们对一个负责刻画关于“存在，任意，与或非”的绝对正确的推理的推演系统的直观要求，
- 另一方面这也是我们也通过将语言和解释数学化得到的一个技术定理。

数学解释也是解释。所以我们有基于集合论的一阶逻辑形式语义学。最一般的完全性定理是在集合论中实现的。

简单例子：$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \nvdash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$。有的数字等于 1，有的数字等于 2，但没有数字既等于 1 又等于 2。

凭什么说推不出

$\phi \nvdash \psi$ 当且仅当存在一个对函数，谓词，和名字的解释使得在其中 ϕ 为真而 ψ 为假。

- 这一方面是我们对一个负责刻画关于“存在，任意，与或非”的绝对正确的推理的推演系统的直观要求，
- 另一方面这也是我们也通过将语言和解释数学化得到的一个技术定理。

数学解释也是解释。所以我们有基于集合论的一阶逻辑形式语义学。最一般的完全性定理是在集合论中实现的。

简单例子：$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \nvdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$。有的数字等于 1，有的数字等于 2，但没有数字既等于 1 又等于 2。

推演系统举例

$\forall$ 的消去和引入：

- 消去：只要不引发语义冲突，随意带入。
- 引入：确保有一个崭新的工具变量。

推演系统举例

$\forall$ 的消去和引入：

- 消去：只要不引发语义冲突，随意带入。
- 引入：确保有一个崭新的工具变量。

$\forall x R(x,x) \vdash \forall y R(y,y)$

推演系统举例

$\forall$ 的消去和引入：

$\{\forall x P(x), \forall y (P(y) \to Q(y))\} \vdash \forall x Q(x)$

推演系统举例

$\forall$ 的消去和引入：

$\emptyset \vdash \forall x(\forall y P(y) \rightarrow P(x))$

推演系统举例

$\forall$ 的消去和引入：

$$\forall x \forall y(\neg R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \vdash \forall y R(y,y)$$

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

- 引入：可以随意把具体的例子（项）抽象成存在命题。最好使用崭新的变量来换掉具体的项。
- 消去："已知存在一个 ϕ。不妨称这样的一个 ϕ 为 z。我们证出来的与 z 无关的 ψ 只依赖于 ϕ 的存在性。"

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

- 引入：可以随意把具体的例子（项）抽象成存在命题。最好使用崭新的变量来换掉具体的项。
- 消去："已知存在一个 ϕ。不妨称这样的一个 ϕ 为 z。我们证出来的与 z 无关的 ψ 只依赖于 ϕ 的存在性。"

$\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$

$\exists$ 的消去和引入：

$\exists x R(x,x) \vdash \exists x \exists y R(x,y)$

注意反过来明显不对：$\exists x \exists y R(x,y) \nvdash \exists x R(x,x)$。我们可以通过画一个包含两个元素的反例来说明。

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)\} \vdash \exists x Q(x)$$

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

$$\{\exists x P(x), \forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \land Q(y)))\} \vdash \exists x Q(x)$$

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

“A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational.”

已知 $\sqrt{2}$ 是无理数。

推演系统举例

$\exists$ 的消去和引入：

“A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational.”

已知 $\sqrt{2}$ 是无理数。然而 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 要么是有理数要么是无理数：

- 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，则 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 见证了“存在无理数的无理数次方是有理数”这个命题。

推演系统举例

∃ 的消去和引入：

“A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational.”

已知 $\sqrt{2}$ 是无理数。然而 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 要么是有理数要么是无理数：

- 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，则 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 见证了“存在无理数的无理数次方是有理数”这个命题。
- 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，则 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ 是见证，因为 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2} = 2$。

∃ 的消去和引入：

“A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational.”

已知 $\sqrt{2}$ 是无理数。然而 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 要么是有理数要么是无理数：

- 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，则 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 见证了“存在无理数的无理数次方是有理数”这个命题。
- 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，则 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ 是见证，因为 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$。

如果我们取 R：“是有理数”，a：$\sqrt{2}$，$f(x)$：$x^{\sqrt{2}}$，则我们其实在证明的是：

$$\{\neg R(a), R(f(f(a)))\} \vdash \exists x(\neg R(x) \wedge R(f(x))).$$

推演系统举例

$$\{\neg R(a), R(f(f(a)))\} \vdash \exists x(\neg R(x) \wedge R(f(x))).$$

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x, y)$：

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x, y)$：

- 随便挑一个东西 a。由假设，$\exists y R(a, y)$。

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x,y)$：

- 随便挑一个东西 a。由假设，$\exists y R(a,y)$。
- 不妨称这个被 a R 的东西为 b。则 $R(a,b)$。

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x, y)$：

- 随便挑一个东西 a。由假设，$\exists y R(a, y)$。
- 不妨称这个被 a R 的东西为 b。则 $R(a, b)$。
- a 是随便挑的，所以 $\forall x R(x, b)$。

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x,y)$：

- 随便挑一个东西 a。由假设，$\exists y R(a,y)$。
- 不妨称这个被 a R 的东西为 b。则 $R(a,b)$。
- a 是随便挑的，所以 $\forall x R(x,b)$。
- 把 b 这个具体的例子抽象掉，我们有 $\exists y \forall x R(x,y)$。

自然语言中“随便挑一个”的错误用法

假设 $\forall x \exists y R(x, y)$：

- 随便挑一个东西 a。由假设，$\exists y R(a, y)$。
- 不妨称这个被 a R 的东西为 b。则 $R(a, b)$。
- a 是随便挑的，所以 $\forall x R(x, b)$。
- 把 b 这个具体的例子抽象掉，我们有 $\exists y \forall x R(x, y)$。

这个证明当然是错的，当我们通过量化概括跳出一个语境的时候，在这个语境中创造的所有变量都要消灭掉。

常见套路推演

全称分配：$\forall x(\phi \wedge \psi) \dashv\vdash \forall x\phi \wedge \forall x\psi$

单向全称分配：$\forall x\phi \vee \forall x\psi \vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

存在分配：$\exists x(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \exists x\phi \vee \exists x\psi$

单向存在分配：$\exists x(\phi \wedge \psi) \vdash \exists x\phi \wedge \exists x\psi$

德摩根：

- $\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$
- $\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi$
- $\neg\forall x\phi \dashv\vdash \exists x\neg\phi$
- $\neg\exists x\phi \dashv\vdash \forall x\neg\phi$

汉语中的量化现象

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \rightarrow \psi)$

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \to \psi)$

“有一个 ϕ 的 ψ”：$\exists x(\phi \wedge \psi)$

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \to \psi)$

“有一个 ϕ 的 ψ”：$\exists x(\phi \wedge \psi)$

“有效的命题逻辑公式都是可证的”

- $\forall x((\text{公式}(x) \wedge \text{有效}(x)) \to \text{可证}(x))$

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \to \psi)$

“有一个 ϕ 的 ψ”：$\exists x(\phi \wedge \psi)$

“有效的命题逻辑公式都是可证的”

- $\forall x((\text{公式}(x) \wedge \text{有效}(x)) \to \text{可证}(x))$
- $\forall x\Big(\Big(\text{公式}(x) \wedge \forall y\,(\text{赋值}(y) \to \text{真}(y, x))\Big) \to \text{可证}(x)\Big)$

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \to \psi)$

“有一个 ϕ 的 ψ”：$\exists x(\phi \wedge \psi)$

“有效的命题逻辑公式都是可证的”

- $\forall x((\text{公式}(x) \wedge \text{有效}(x)) \to \text{可证}(x))$
- $\forall x\Big(\big(\text{公式}(x) \wedge \forall y\,(\text{赋值}(y) \to \text{真}(y, x))\big) \to \text{可证}(x)\Big)$
- $\forall x\Big(\big(\text{公式}(x) \wedge \forall y\,(\text{赋值}(y) \to \text{真}(y, x))\big) \to \exists z\,(\text{证明}(z) \wedge \text{结尾}(z, x))\Big)$

基本构造

“每一个 ϕ 的东西都 ψ”：$\forall x(\phi \to \psi)$

“有一个 ϕ 的 ψ”：$\exists x(\phi \wedge \psi)$

“有效的命题逻辑公式都是可证的”

- $\forall x((公式(x) \wedge 有效(x)) \to 可证(x))$
- $\forall x\Big(\big(公式(x) \wedge \forall y\,(赋值(y) \to 真(y,x))\big) \to 可证(x)\Big)$
- $\forall x\Big(\big(公式(x) \wedge \forall y\,(赋值(y) \to 真(y,x))\big) \to \exists z\,(证明(z) \wedge 结尾(z,x))\Big)$

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的区别和联系：

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 反之不然。

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$
- 反之不然。

所以相对于“每个 P 也都是 Q”，$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 说得太强，太难为真。

基本构造

$\forall x(P(x) \land Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$
- 反之不然。

所以相对于“每个 P 也都是 Q”，$\forall x(P(x) \land Q(x))$ 说得太强，太难为真。

$\exists x(P(x) \land Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系类似。

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 反之不然。

所以相对于“每个 P 也都是 Q”，$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 说得太强，太难为真。

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的区别和联系类似。

$$\begin{aligned} \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) &\dashv\vdash \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &\dashv\vdash \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \end{aligned}$$

基本构造

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系：

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$
- 反之不然。

所以相对于“每个 P 也都是 Q”，$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 说得太强，太难为真。

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \to Q(x))$ 的区别和联系类似。

$$\begin{aligned}\exists x(P(x) \to Q(x)) &\dashv\vdash \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &\dashv\vdash \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)\end{aligned}$$

所以相对于“有一个 P 它也是 Q”或者“有一个 Q 的 P”，$\exists x(P(x) \to Q(x))$ 说得太弱，太容易为真。

例子

如下论证是有效的：

$$\frac{\text{狗都是动物}}{\text{狗的脑袋都是动物的脑袋}}$$

例子

如下论证是有效的：

$$\frac{\text{狗都是动物}}{\text{狗的脑袋都是动物的脑袋}}$$

形式化：

$$\frac{\forall x(D(x) \to A(x))}{\forall x(\exists y(D(y) \wedge H(x,y)) \to \exists y(A(y) \wedge H(x,y)))}$$

例子

如下论证是有效的：

$$\frac{\text{狗都是动物}}{\text{狗的脑袋都是动物的脑袋}}$$

形式化：

$$\frac{\forall x(D(x)\to A(x))}{\forall x(\exists y(D(y)\wedge H(x,y))\to\exists y(A(y)\wedge H(x,y)))}$$

德摩根注意到这是亚里士多德三段论不能形式化的有效推理。

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西
存在邪恶的东西

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西
存在邪恶的东西

不存在全善且全能的东西

形式化：

例子

$$\begin{array}{l} \text{每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西} \\ \text{全能的东西能消灭所有东西} \\ \text{不存在被某个东西消灭了的东西} \\ \text{存在邪恶的东西} \\ \hline \text{不存在全善且全能的东西} \end{array}$$

形式化：

$$\forall x(G(x) \to \forall y((C(x,y) \land E(y)) \to D(x,y)))$$

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西
存在邪恶的东西

不存在全善且全能的东西

形式化：

$$\forall x(G(x) \to \forall y((C(x,y) \wedge E(y)) \to D(x,y)))$$
$$\forall x(P(x) \to \forall y C(x,y))$$

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西
存在邪恶的东西

不存在全善且全能的东西

形式化：

$$
\begin{aligned}
&\forall x(G(x) \to \forall y((C(x,y) \wedge E(y)) \to D(x,y))) \\
&\forall x(P(x) \to \forall y C(x,y)) \\
&\neg \exists x \exists y D(y,x)
\end{aligned}
$$

例子

每个全善的东西都消灭了所有它能消灭的邪恶的东西
全能的东西能消灭所有东西
不存在被某个东西消灭了的东西
存在邪恶的东西

不存在全善且全能的东西

形式化：

$$\forall x(G(x) \rightarrow \forall y((C(x,y) \wedge E(y)) \rightarrow D(x,y)))$$
$$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y C(x,y))$$
$$\neg \exists x \exists y D(y,x)$$
$$\exists x E(x)$$

$$\neg \exists x(G(x) \wedge P(x))$$

例子

所有东西都有原因

例子

所有东西都有原因
原因的原因也是原因

例子

$$\frac{\text{所有东西都有原因} \quad \text{原因的原因也是原因}}{\text{有个东西是自身的原因}}$$

形式化：

例子

$$\frac{\begin{array}{l}\text{所有东西都有原因} \\ \text{原因的原因也是原因}\end{array}}{\text{有个东西是自身的原因}}$$

形式化：

$$\forall x \exists y C(y, x)$$

例子

$$\frac{\begin{array}{l}\text{所有东西都有原因} \\ \text{原因的原因也是原因}\end{array}}{\text{有个东西是自身的原因}}$$

形式化：

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \exists y C(y,x) \\ \forall x \forall y \forall z ((C(z,y) \wedge C(y,x)) \to C(z,x))\end{array}}{}$$

例子

$$\frac{\begin{array}{l}\text{所有东西都有原因}\\ \text{原因的原因也是原因}\end{array}}{\text{有个东西是自身的原因}}$$

形式化：

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \exists y C(y,x)\\ \forall x \forall y \forall z ((C(z,y) \wedge C(y,x)) \to C(z,x))\end{array}}{\exists x C(x,x)}$$

这个推理是无效的，但为了构造反例你必须使用包含无穷多个东西的结构。

数数

“教室里有不止一个人”

数数

“教室里有不止一个人”

错误的：$\exists x \exists y(\text{是人}(x) \wedge \text{是人}(y) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge \text{在里面}(y, c))$。

数数

“教室里有不止一个人”

错误的：$\exists x \exists y(是人(x) \wedge 是人(y) \wedge 在里面(x, c) \wedge 在里面(y, c))$。

正确的：$\exists x \exists y(是人(x) \wedge 是人(y) \wedge 在里面(x, c) \wedge 在里面(y, c) \wedge \neg x = y)$

数数

“教室里有不止一个人”

错误的：$\exists x \exists y($是人$(x) \wedge$是人$(y) \wedge$在里面$(x, c) \wedge$在里面$(y, c))$。

正确的：$\exists x \exists y($是人$(x) \wedge$是人$(y) \wedge$在里面$(x, c) \wedge$在里面$(y, c) \wedge \neg x = y)$

方便起见我们没有区分 $=$ 和 $\doteq$。$\neg s = t$ 通常写作 $s \neq t$。

数数

“教室里有不止一个人”

错误的：$\exists x \exists y(\text{是人}(x) \wedge \text{是人}(y) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge \text{在里面}(y, c))$。

正确的：$\exists x \exists y(\text{是人}(x) \wedge \text{是人}(y) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge \text{在里面}(y, c) \wedge \neg x = y)$

方便起见我们没有区分 $=$ 和 $\doteq$。$\neg s = t$ 通常写作 $s \neq t$。

“小明是教室里的人里面最高的”

数数

“教室里有不止一个人”

错误的：$\exists x \exists y(\text{是人}(x) \wedge \text{是人}(y) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge \text{在里面}(y, c))$。

正确的：$\exists x \exists y(\text{是人}(x) \wedge \text{是人}(y) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge \text{在里面}(y, c) \wedge \neg x = y)$

方便起见我们没有区分 $=$ 和 $\doteq$。$\neg s = t$ 通常写作 $s \neq t$。

“小明是教室里的人里面最高的”

$\text{在里面}(m, c) \wedge \forall x((\text{是人}(x) \wedge \text{在里面}(x, c) \wedge x \neq m) \rightarrow \text{更高}(m, x))$

数数

"教室里恰有一个人"

数数

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x) \wedge I(x,c)) \wedge \neg\exists x\exists y(H(x) \wedge I(x,c) \wedge H(y) \wedge I(y,c) \wedge x \neq y)$

数数

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x) \wedge I(x,c)) \wedge \neg \exists x \exists y(H(x) \wedge I(x,c) \wedge H(y) \wedge I(y,c) \wedge x \neq y)$

短一点的：

数数

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x)\wedge I(x,c))\wedge\neg\exists x\exists y(H(x)\wedge I(x,c)\wedge H(y)\wedge I(y,c)\wedge x\neq y)$

短一点的：

$$\exists x\left(H(x)\wedge I(x,c)\wedge\forall y\Big(\big(H(y)\wedge I(y,c)\big)\rightarrow x=y\Big)\right)$$

数数

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x) \wedge I(x,c)) \wedge \neg \exists x \exists y(H(x) \wedge I(x,c) \wedge H(y) \wedge I(y,c) \wedge x \neq y)$

短一点的：

$\exists x\left(H(x) \wedge I(x,c) \wedge \forall y\Big((H(y) \wedge I(y,c)) \to x = y\Big)\right)$

一般来说，“恰有一个 ϕ”：$\exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi[y/x] \to y = x))$

数数

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x) \wedge I(x,c)) \wedge \neg \exists x \exists y(H(x) \wedge I(x,c) \wedge H(y) \wedge I(y,c) \wedge x \neq y)$

短一点的：

$\exists x \Big(H(x) \wedge I(x,c) \wedge \forall y \Big((H(y) \wedge I(y,c)) \rightarrow x = y \Big) \Big)$

一般来说，“恰有一个 ϕ”：$\exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi[y/x] \rightarrow y = x))$

“两点确定一条直线”：对任意两个点，恰有一条直线包含它们。

“教室里恰有一个人”

$\exists x(H(x) \wedge I(x,c)) \wedge \neg\exists x \exists y(H(x) \wedge I(x,c) \wedge H(y) \wedge I(y,c) \wedge x \neq y)$

短一点的：

$\exists x \Big(H(x) \wedge I(x,c) \wedge \forall y \Big((H(y) \wedge I(y,c)) \to x = y \Big) \Big)$

一般来说，“恰有一个 ϕ”：$\exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi[y/x] \to y = x))$

“两点确定一条直线”：对任意两个点，恰有一条直线包含它们。

$\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y) \to$
$\exists z(L(z) \wedge I(x,z) \wedge I(y,z) \wedge \forall z'((L(z') \wedge I(x,z') \wedge I(y,z')) \to z' = z)))$

“只”

“只有物理的东西存在”：$\forall x Physical(x)$

“只”

“只有物理的东西存在”：$\forall x Physical(x)$

“只有人才会说话”：$\forall x (Speaks(x) \rightarrow Human(x))$

“只”

“只有物理的东西存在”：$\forall x Physical(x)$

“只有人才会说话”：$\forall x(Speaks(x) \rightarrow Human(x))$

“我只养了猫”：$\forall x(Pet(x, i) \rightarrow Cat(x))$

“只”

“只有物理的东西存在”：$\forall x Physical(x)$

“只有人才会说话”：$\forall x(Speaks(x) \to Human(x))$

“我只养了猫”：$\forall x(Pet(x,i) \to Cat(x))$

“只喜欢猫的人不喜欢狗”：$\forall x((H(x) \wedge \forall y(L(x,y) \to C(y))) \to \neg \exists y(D(y) \wedge L(x,y)))$

关于充分条件和必要条件

我们之前提到只使用实质蕴涵来形式化充分条件和必要条件是不合适的。

关于充分条件和必要条件

我们之前提到只使用实质蕴涵来形式化充分条件和必要条件是不合适的。

例子：“团结既不是胜利的充分条件也不是胜利的必要条件”。

关于充分条件和必要条件

我们之前提到只使用实质蕴涵来形式化充分条件和必要条件是不合适的。

例子：“团结既不是胜利的充分条件也不是胜利的必要条件”。

这句话明显是有可能的，但如果我们只使用实质蕴涵的话，我们只能做到

$$
\begin{aligned}
&\neg(united \to victory) \land \neg(victory \to united) \\
\equiv\, &united \land \neg victory \land victory \land \neg united
\end{aligned}
$$

关于充分条件和必要条件

我们之前提到只使用实质蕴涵来形式化充分条件和必要条件是不合适的。

例子："团结既不是胜利的充分条件也不是胜利的必要条件"。

这句话明显是有可能的，但如果我们只使用实质蕴涵的话，我们只能做到

$$
\begin{aligned}
&\neg(united \to victory) \wedge \neg(victory \to united) \\
\equiv & united \wedge \neg victory \wedge victory \wedge \neg united
\end{aligned}
$$

这是逻辑上矛盾的。

关于充分条件和必要条件

我们之前提到只使用实质蕴涵来形式化充分条件和必要条件是不合适的。

例子："团结既不是胜利的充分条件也不是胜利的必要条件"。

这句话明显是有可能的，但如果我们只使用实质蕴涵的话，我们只能做到

$$
\begin{aligned}
&\neg(united \to victory) \wedge \neg(victory \to united) \\
\equiv & united \wedge \neg victory \wedge victory \wedge \neg united
\end{aligned}
$$

这是逻辑上矛盾的。

用一阶逻辑以及某种较强的存在论假设，我们可以使用

$$\neg\forall s((Possibility(s) \wedge U(s)) \to V(s)) \wedge \neg\forall s((Possibility(s) \wedge V(s)) \to U(s))$$

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

很明显不能是 $\forall x(H(x) \to F(x)) \to \forall x(H(x) \to F(x))$。

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

很明显不能是 $\forall x(H(x) \to F(x)) \to \forall x(H(x) \to F(x))$。

也不能是 $\forall x(\forall x(H(x) \to F(x)) \to (H(x) \to F(x)))$。

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

很明显不能是 $\forall x(H(x) \to F(x)) \to \forall x(H(x) \to F(x))$。

也不能是 $\forall x(\forall x(H(x) \to F(x)) \to (H(x) \to F(x)))$。

“对任意一个人 x，所有人的自由发展是 x 的自由发展的条件”

$$\forall x \Big(H(x) \to \big(F(x) \to \forall y (H(y) \to F(y)) \big) \Big)$$

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

很明显不能是 $\forall x(H(x) \to F(x)) \to \forall x(H(x) \to F(x))$。

也不能是 $\forall x(\forall x(H(x) \to F(x)) \to (H(x) \to F(x)))$。

“对任意一个人 x，所有人的自由发展是 x 的自由发展的条件”

$$\forall x\Big(H(x) \to \big(F(x) \to \forall y(H(y) \to F(y))\big)\Big)$$

一个好的练习：上面这句话和 $\exists x(H(x) \wedge F(x)) \to \forall y(H(y) \to D(y))$ 等价。

另一个例子

“每个人的自由发展是一切人的自由发展的条件”

很明显不能是 $\forall x(H(x) \to F(x)) \to \forall x(H(x) \to F(x))$。

也不能是 $\forall x(\forall x(H(x) \to F(x)) \to (H(x) \to F(x)))$。

“对任意一个人 x，所有人的自由发展是 x 的自由发展的条件”

$$\forall x\Big(H(x) \to \big(F(x) \to \forall y(H(y) \to F(y))\big)\Big)$$

一个好的练习：上面这句话和 $\exists x(H(x) \land F(x)) \to \forall y(H(y) \to D(y))$ 等价。

我们没有使用可能性：有点复杂。

“除非”

“所有素数都是奇数，除了 2”

“除非”

“所有素数都是奇数，除了 2”

- $\forall x(x \neq 2 \rightarrow (P(x) \rightarrow O(x)))$

“除非”

“所有素数都是奇数，除了 2”

- $\forall x(x \neq 2 \rightarrow (P(x) \rightarrow O(x)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow (O(x) \vee x = 2))$

“除非”

“所有素数都是奇数，除了 2”

- $\forall x(x \neq 2 \rightarrow (P(x) \rightarrow O(x)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow (O(x) \vee x = 2))$

“教室里除了人还是人”

“除非”

“所有素数都是奇数，除了 2”

- $\forall x(x \neq 2 \rightarrow (P(x) \rightarrow O(x)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow (O(x) \vee x = 2))$

“教室里除了人还是人” $\forall x(\neg H(x) \rightarrow (I(x, c) \rightarrow H(x)))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \land O(x,y)))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \land O(x, y)))$
- $\exists y(C(y) \land \forall x(H(x) \to C(x, y)))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \land O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \land \forall x(H(x) \to C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \wedge \forall x(H(x) \rightarrow C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \wedge \forall t(T(t) \rightarrow \exists y(H(y) \wedge R(y,x,t))))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \land O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \land \forall x(H(x) \to C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \land \forall t(T(t) \to \exists y(H(y) \land R(y,x,t))))$
- $\exists x(B(x) \land \exists y(H(y) \land \forall t(T(t) \to R(y,x,t))))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \wedge O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \wedge \forall x(H(x) \to C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \wedge \forall t(T(t) \to \exists y(H(y) \wedge R(y,x,t))))$
- $\exists x(B(x) \wedge \exists y(H(y) \wedge \forall t(T(t) \to R(y,x,t))))$

“一个好的医生肯定会拉丁语”

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge O(x, y)))$
- $\exists y(C(y) \wedge \forall x(H(x) \rightarrow C(x, y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \wedge \forall t(T(t) \rightarrow \exists y(H(y) \wedge R(y, x, t))))$
- $\exists x(B(x) \wedge \exists y(H(y) \wedge \forall t(T(t) \rightarrow R(y, x, t))))$

“一个好的医生肯定会拉丁语”

- $\forall x(GD(x) \rightarrow L(x))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y(C(y) \land O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \land \forall x(H(x) \rightarrow C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \land \forall t(T(t) \rightarrow \exists y(H(y) \land R(y,x,t))))$
- $\exists x(B(x) \land \exists y(H(y) \land \forall t(T(t) \rightarrow R(y,x,t))))$

“一个好的医生肯定会拉丁语”

- $\forall x(GD(x) \rightarrow L(x))$
- $\exists x(GD(x) \land L(x))$

看上去有歧义

“每个人都养了一只猫” / “每个人都读过一本书”

- $\forall x(H(x) \to \exists y(C(y) \wedge O(x,y)))$
- $\exists y(C(y) \wedge \forall x(H(x) \to C(x,y)))$

“有本书总是有一个人在读”

- $\exists x(B(x) \wedge \forall t(T(t) \to \exists y(H(y) \wedge R(y,x,t))))$
- $\exists x(B(x) \wedge \exists y(H(y) \wedge \forall t(T(t) \to R(y,x,t))))$

“一个好的医生肯定会拉丁语”

- $\forall x(GD(x) \to L(x))$
- $\exists x(GD(x) \wedge L(x))$

“肯定”两个字让我们倾向于全称命题的解释。

另一个困难

Donkey Sentence: ‘Every farmer who owns a donkey beats it.’

另一个困难

Donkey Sentence: ‘Every farmer who owns a donkey beats it.’

通行翻译：$\forall x(F(x) \to \forall y((D(y) \wedge O(x,y)) \to B(x,y)))$

另一个困难

Donkey Sentence: ‘Every farmer who owns a donkey beats it.’

通行翻译：$\forall x(F(x) \to \forall y((D(y) \wedge O(x,y)) \to B(x,y)))$

“那个”，摹状词

有时候一个性质唯一确定一个对象，比如在 $a \neq b$ 时“通过点 a 和点 b 的直线”。

“那个”，摹状词

有时候一个性质唯一确定一个对象，比如在 $a \neq b$ 时“通过点 a 和点 b 的直线”。

有时候我们只能通过性质来确定对象，比如“那把让你小脚趾很疼的椅子”，“那个发出了让哈勃望远镜在 x 方向刚刚接收到的光子的星星”。

“那个”，摹状词

有时候一个性质唯一确定一个对象，比如在 $a \neq b$ 时“通过点 a 和点 b 的直线”。

有时候我们只能通过性质来确定对象，比如“那把让你小脚趾很疼的椅子”，“那个发出了让哈勃望远镜在 x 方向刚刚接收到的光子的星星”。

这种构造在英语里有明确的语法标志：“the”，比如 ‘the chair that hit your toe’, ‘the star you saw this morning’ 等。

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

‘The cat I own is fat’: $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \rightarrow y = x) \wedge F(x))$

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

‘The cat I own is fat’: $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \rightarrow y = x) \wedge F(x))$

罗素式分析的一个问题：带摹状词的句子总是有真假。

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

‘The cat I own is fat’: $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \rightarrow y = x) \wedge F(x))$

罗素式分析的一个问题：带摹状词的句子总是有真假。

考虑“北大章程中规定的校歌不是燕园情”。根据罗素式的分析，这句话是假的。但我们的直观是这句话最好不说真假，而是说这句话预设失效，就像“你是不是戒烟了”一样。

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

‘The cat I own is fat’: $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \to y = x) \wedge F(x))$

罗素式分析的一个问题：带摹状词的句子总是有真假。

考虑“北大章程中规定的校歌不是燕园情”。根据罗素式的分析，这句话是假的。但我们的直观是这句话最好不说真假，而是说这句话预设失效，就像“你是不是戒烟了”一样。

“那个 $\phi\psi$”的预设是恰好有一个 ϕ。

摹状词

罗素式的分析：‘the ϕ is ψ’ 的意思是恰好有一个 ϕ，而且这个东西是 ψ。

‘The cat I own is fat’: $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \rightarrow y = x) \wedge F(x))$

罗素式分析的一个问题：带摹状词的句子总是有真假。

考虑“北大章程中规定的校歌不是燕园情”。根据罗素式的分析，这句话是假的。但我们的直观是这句话最好不说真假，而是说这句话预设失效，就像“你是不是戒烟了”一样。

“那个 $\phi\psi$”的预设是恰好有一个 ϕ。

这句话本身的意思在预设成立的时候可以等价地理解为

- $\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$ 或
- $\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$。

摹状词

"我讨厌那个骗了我的人"：

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \rightarrow y = x))$

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \rightarrow y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge D(i,x))$

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x)\land L(x,i)\land\forall y((H(y)\land L(y,i))\to y=x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x)\land L(x,i)\land D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x)\land L(x,i))\to D(i,x))$

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \land L(x,i) \land \forall y((H(y) \land L(y,i)) \to y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \land L(x,i) \land D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x) \land L(x,i)) \to D(i,x))$

预设通常只要求在说话的语境中成立。

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \rightarrow y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x) \wedge L(x,i)) \rightarrow D(i,x))$

预设通常只要求在说话的语境中成立。

摹状词的使用也容易导致主观上有意义的句子客观来看缺乏意义，比如

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \to y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x) \wedge L(x,i)) \to D(i,x))$

预设通常只要求在说话的语境中成立。

摹状词的使用也容易导致主观上有意义的句子客观来看缺乏意义，比如

- 你以为你的外卖被 x 偷了（其实没有），然后你在 x 面前说“那个偷了我的外卖的人准备好进监狱吧”。

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \to y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x) \wedge L(x,i)) \to D(i,x))$

预设通常只要求在说话的语境中成立。

摹状词的使用也容易导致主观上有意义的句子客观来看缺乏意义，比如

- 你以为你的外卖被 x 偷了（其实没有），然后你在 x 面前说“那个偷了我的外卖的人准备好进监狱吧”。
- 你用这句话想表达的意思是“x 你准备进监狱吧”

摹状词

“我讨厌那个骗了我的人”：

- 预设是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge \forall y((H(y) \wedge L(y,i)) \to y = x))$
- 意思可以是 $\exists x(H(x) \wedge L(x,i) \wedge D(i,x))$
- 也可以是 $\forall x((H(x) \wedge L(x,i)) \to D(i,x))$

预设通常只要求在说话的语境中成立。

摹状词的使用也容易导致主观上有意义的句子客观来看缺乏意义，比如

- 你以为你的外卖被 x 偷了（其实没有），然后你在 x 面前说“那个偷了我的外卖的人准备好进监狱吧”。
- 你用这句话想表达的意思是“x 你准备进监狱吧”
- 但这句话客观上预设失败。

“有无穷多只青蛙。”

定理

令 P 是一个一元谓词。不存在一个一阶逻辑句子 φ 使得对任何可以解释 φ 中使用的非逻辑符号以及谓词 P 的结构 $\mathfrak{A}$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ 当且仅当 } P^{\mathfrak{A}} \text{ 是无穷的。}$$

反设一个 $\mathcal{L}$-句子 φ 表达了“有无穷多个 P”。考虑扩张的语言 $\mathcal{L}^+$，其中我们对每个自然数 i 新加入一个常量 c_i。

接下来考虑 $\mathcal{L}^+$-公式集 $\Gamma = \{\neg\varphi, \dots, c_i \neq c_j, \dots, P(c_i), \dots\}(i \neq j)$。$\Gamma \models \bot$，但 $\Gamma \nvdash \bot$。

为什么 $\Gamma \nvdash \bot$? 因为对任意 Γ 的有穷子集 Γ_0 都有 $\Gamma_0 \nvdash \bot$，而这又是因为 $\Gamma_0 \nvDash \bot$。

一阶逻辑的极限

定理

一阶逻辑具有紧致性：对任何公式集 Γ，如果对 Γ 的每一个有穷子集都存在一个结构满足它，那也有一个结构满足 Γ 全体。

利用紧致性，我们可以证明下面的句子都不能不引入没有直接提到的概念而翻译到一阶逻辑：

- For every human being there is a chicken. (There are more chicken than there are human beings.)
- Some critics admire only one another.