一阶逻辑理论（下）

自然演绎系统和可靠性完全性定理

钟盛阳

2023 年春季

北京大学哲学系

语形

- 代入、代入自由、规则 $(\forall\mathrm{E})$ 和规则 $(\exists\mathrm{I})$
- 规则 $(\doteq\mathrm{I})$ 和规则 $(\doteq\mathrm{E})$
- 规则 $(\forall\mathrm{I})$ 和规则 $(\exists\mathrm{E})$
- 一个希尔伯特式证明系统

可靠性定理和完全性定理

语形

一阶逻辑的自然演绎系统

一阶逻辑的自然演绎系统的规则由命题逻辑的自然演绎系统的规则的一阶逻辑形式语言版本加上以下六条规则:

- $(\doteq\mathrm{I})$
- $(\doteq\mathrm{E})$
- $(\forall\mathrm{I})$
- $(\forall\mathrm{E})$
- $(\exists\mathrm{I})$
- $(\exists\mathrm{E})$

语形

- 代入、代入自由、规则 (∀E) 和规则 (∃I)
- 规则 ($\doteq$I) 和规则 ($\doteq$E)
- 规则 (∀I) 和规则 (∃E)
- 一个希尔伯特式证明系统

可靠性定理和完全性定理

自然语言中的代入

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句，t 表示一个名字。

用记号 $P(t, y_1, \ldots, y_n)$ 表示在 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 中将 x 的每一次自由的出现都替换为 t 所得到的陈述句。

注意：

如果 x 是 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 的一个约束变元，那么 $P(t, y_1, \ldots, y_n)$ 与 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 是同一个陈述句。

形式语言中的代入

令 x 是一个个体变元，t 是一个 $\mathcal{L}$-项，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。

记号 $\varphi[t/x]$ 表示将 x 在 φ 中的每一个自由的出现替换为 t 所得到的公式。

注意：

如果 x 不是 φ 的自由变元，那么 φ 和 $\varphi[t/x]$ 是同一个公式。

关于“对于任意一个”的使用策略

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句，t 是一个名字。

- 已推知对于任意 x 有 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$：
  我们由此推出并使用 $P(t, y_1, \ldots, y_n)$。

一个问题

直观上，从下面的陈述句 1 推不出陈述句 2：

1. 对于任意自然数 x，存在一个自然数 y 使得 $y = x + 1$。
2. 存在一个自然数 y 使得 $y = (10 \times y) + 1$。

问题在于：

在陈述句 1 中，x 的出现是自由的；

在陈述句 2 中，在代入 x 的名字 $(10 \times y)$ 中的 y 在陈述句 2 中的出现是约束的。

代入自由

令 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，t 是一个 $\mathcal{L}$-项，x 是一个个体变元。

t 对于 φ 中的 x**代入自由**（t is free for x in φ），如果对于在 t 中出现的每一个个体变元 y，在 φ 里面 x 在量词 $\forall y$ 或者 $\exists y$ 的辖域内没有自由的出现。

不确切地说，即在 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi[t/x]$ 中，在 t 中的每一个个体变元的出现都是自由的出现。

全称量词消去规则 (∀E)

规则 (∀E)
如果 $\mathcal{L}$-项 t 对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且 $$\begin{array}{c} D \\ \forall x\varphi \end{array}$$ 是一个 $\mathcal{L}$-推演， 那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \forall x\varphi \end{array}}{\varphi[t/x]}\ (\forall\mathrm{E})$$ 它用到的前提是 D 用到的前提。 它的结论是 $\varphi[t/x]$。 它的高度是 $h(D)+1$。

例子

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(z)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x))}{(P(z) \to Q(z))}\,(\forall\mathrm{E}),\alpha}{Q(z)}\,(\to\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\forall x(Q(x) \to R(x))}{(Q(z) \to R(z))}\,(\forall\mathrm{E}),\beta}{R(z)}\,(\to\mathrm{E})}{(P(z) \to R(z))}\,(\to\mathrm{I}),1$$

α: z 相对于 $(P(x) \to Q(x))$ 中的 x 代入自由

β: z 相对于 $(Q(x) \to R(x))$ 中的 x 代入自由

自然语言：

假设 $P(z)$。已知，对于任意 x，如果 $P(x)$，那么 $Q(x)$。所以，如果 $P(z)$，那么 $Q(z)$。因此，据假设，$Q(z)$。已知，对于任意 x，如果 $Q(x)$，那么 $R(x)$。所以，如果 $Q(z)$，那么 $R(z)$。已推知 $Q(z)$，因此 $R(z)$。

所以，如果 $P(z)$，那么 $R(z)$。

反例

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\frac{\forall x \exists y R(x,y)}{\exists y R(y,y)}\ (\forall E)\ \times$$

自然语言：

已知对于任意自然数 x 有一个自然数 y 使得 $y = x + 1$。

所以，有一个自然数 y 使得 $y = y + 1$。

关于“存在一个”的证明策略

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

- 要证“存在一个 x 使得 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$”：
  给出一个名字 t 和它所指称的个体，并给出 $P(t, y_1, \ldots, y_n)$ 的证明。

存在量词引入规则 (∃I)

规则 (∃I)

如果 $\mathcal{L}$-项 t 相对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且

$$\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array}$$

是一个 $\mathcal{L}$-推演，
那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演

$$\begin{array}{c} D \\ \dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}\ (\forall \mathrm{E}) \end{array}$$

它用到的前提是 D 用到的前提。
它的结论是 $\exists x\varphi$。
它的高度是 $h(D) + 1$。

反例

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演:

$$\frac{\forall y R(F(y), y)}{\exists x \forall y R(x, y)}\ (\exists \mathrm{I})\ \times$$

自然语言:

已知，对于每一个人 y，y 都比 y 的爸爸年龄小。

所以，有一个人 x 使得，对于每一个人 y，y 都比 x 的年龄小。

语形

- 代入、代入自由、规则 (∀E) 和规则 (∃I)
- 规则 ($\doteq$I) 和规则 ($\doteq$E)
- 规则 (∀I) 和规则 (∃E)
- 一个希尔伯特式证明系统

可靠性定理和完全性定理

等同

同一律

任何个体都跟自身等同。

莱布尼兹律

如果个体 a 和个体 b 等同，那么任意适用于 a 的谓词也适用于 b。

内涵语境与莱布尼兹律的失效

鲁迅和周树人等同，考虑谓词“小明知道鲁迅是……”。

在某些情况下，“小明知道鲁迅是鲁迅”为真，而“小明知道鲁迅是周树人”为假。

“小明知道”后面的宾语从句所在的语境称为内涵语境；在内涵语境下，莱布尼兹律失效。

数学中没有内涵语境，数理逻辑不考虑内涵语境，所以莱布尼兹律成立。

内涵语境需要使用模态逻辑来研究。

等词引入规则 ($\doteq$I)

规则 ($\doteq$I)
对于任意 $\mathcal{L}$-项 t，以下是一个 $\mathcal{L}$-推演： $$\dfrac{}{(t \doteq t)}\,(\doteq\text{I})$$ 它没有用到的前提。 它的结论是 $(t \doteq t)$。 它的高度是 0。

等词消去规则 ($\doteq$E)

规则 ($\doteq$E)

如果 $\mathcal{L}$-项 s 和 t 相对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且

$$\begin{array}{c} D_1 \\ (s \doteq t) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \varphi[s/x] \end{array}$$

都是 $\mathcal{L}$-推演，
那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ (s \doteq t) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \varphi[s/x] \end{array}}{\varphi[t/x]} \ (\doteq\mathrm{E})$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提和 D_2 用到的前提。
它的结论是 $\varphi[t/x]$。
它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\} + 1$。

例子

$$\dfrac{(s \doteq t) \qquad \dfrac{}{(s \doteq s)}\,(\doteq\mathrm{I})}{(t \doteq s)}\,(\doteq\mathrm{E}),\alpha$$

α： t 对于 $(x \doteq s)$ 中的 x 代入自由

反例

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演:

$$\dfrac{(x \doteq y) \qquad \exists x R(x,y)}{\exists x R(x,x)}\ (\doteq\mathrm{E})\ \times$$

自然语言:

已知 x 等同于 y。又已知有一个 x 是 y 的爸爸。

所以,有一个 x 是 x 的爸爸。

语形

- 代入、代入自由、规则 ($\forall$E) 和规则 ($\exists$I)
- 规则 ($\doteq$I) 和规则 ($\doteq$E)
- **规则 ($\forall$I) 和规则 ($\exists$E)**
- 一个希尔伯特式证明系统

可靠性定理和完全性定理

关于“对于任意一个”的证明策略

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

- 要证“对于任意一个 x，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$”：
  取一个不出现在已知条件、也不出现在已经写下的证明中、也不出现在 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 中的个体变元 z，然后给出 $P(z, y_1, \ldots, y_n)$ 的证明。

这意味着，对于一个关于 $P(z, y_1, \ldots, y_n)$ 的证明，如果个体变元 z 满足一定条件，那么这个证明也是关于“对于任意一个 x，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$”的证明。

全称量词引入规则 (∀I)

规则 (∀I)

如果 t 是 $\mathcal{L}$ 的一个个体变元或者常元符号，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，

$$\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array}$$

是一个 $\mathcal{L}$-推演并且 t 不在 D 用到的前提中和 φ 中出现，
那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array}}{\forall x\varphi}\ (\forall\mathrm{I})$$

它用到的前提是 D 用到的前提。
它的结论是 $\forall x\varphi$。
它的高度是 $h(D)+1$。

例子

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[P(z)]^1$}
\AxiomC{$\forall x(P(x) \to Q(x))$}
\RightLabel{$(\forall \mathrm{E}),\alpha$}
\UnaryInfC{$(P(z) \to Q(z))$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{$Q(z)$}
\AxiomC{$\forall x(Q(x) \to R(x))$}
\RightLabel{$(\forall \mathrm{E}),\beta$}
\UnaryInfC{$(Q(z) \to R(z))$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{$R(z)$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I}),1$}
\UnaryInfC{$(P(z) \to R(z))$}
\RightLabel{$(\forall \mathrm{I}),\gamma$}
\UnaryInfC{$\forall x(P(x) \to R(x))$}
\end{prooftree}
$$

α: z 相对于 $(P(x) \to Q(x))$ 中的 x 代入自由

β: z 相对于 $(Q(x) \to R(x))$ 中的 x 代入自由

γ: z 不出现在 $(P(x) \to R(x))$、$\forall x(P(x) \to Q(x))$ 和 $\forall x(Q(x) \to R(x))$ 中。

自然语言：

任取 z。假设 $P(z)$。已知，对于任意 x，如果 $P(x)$，那么 $Q(x)$。所以，如果 $P(z)$，那么 $Q(z)$。因此，据假设，$Q(z)$。已知，对于任意 x，如果 $Q(x)$，那么 $R(x)$。所以，如果 $Q(z)$，那么 $R(z)$。已推知 $Q(z)$，因此 $R(z)$。所以，如果 $P(z)$，那么 $R(z)$。

因为 z 是任意的，所以，对于任意 x，如果 $P(x)$，那么 $R(x)$。

反例 1

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\dfrac{}{(y \doteq y)}\,(\doteq\mathrm{I})}{\forall x(x \doteq y)}\,(\forall\mathrm{I})\ \times$$

自然语言：

已知 y 等同于 y。

所以，所有一切都等同于 y。

反例 2

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{[(x \doteq \overline{0})]^1}{\forall y(y \doteq \overline{0})}\,(\forall \mathrm{I})\ \times$$

自然语言：

假设 x 等同于 0。

所以，对于任意 y，y 等同于 0。

关于“存在一个”的使用策略

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

- 已推知“存在一个 x 使得 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$”：
  取一个不出现在已知条件、也不出现在已经写下的证明中、也不出现在 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 中的个体变元 z，然后把 $P(z, y_1, \ldots, y_n)$ 当作已推出的结论。

直观来讲，我们把 z 当作存在的那个东西的名字，但要注意保证 z 与已经涉及的名字没有任何关联。

存在量词消去规则 (∃E)

规则 (∃E)
如果 t 是 $\mathcal{L}$ 的一个个体变元或者常元符号，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式， $$\begin{array}{ccc} D_1 & & D_2 \\ \exists x\varphi & \textbf{和} & \psi \end{array}$$ 都是 $\mathcal{L}$-推演，t 不在 φ 和 ψ 中出现，也不在，除去 $\varphi[t/x]$，D_2 用到的前提中出现，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演： $$\dfrac{\begin{array}{cc} & [\varphi[t/x]] \\ D_1 & D_2 \\ \exists x\varphi & \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists\mathrm{E})$$ 它用到的前提是 D_1 用到的前提和，除了 $\varphi[t/x]$ 以外，D_2 用到的前提。 它的结论是 ψ。 它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\} + 1$。

例子

$$\cfrac{\exists x\forall y R(x,y) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall y R(u,y)]^1}{R(u,z)}\,(\forall E),\alpha}{\exists x R(x,z)}\,(\exists I),\beta}{\forall y\exists x R(x,y)}\,(\forall I),\gamma}{\forall y \exists x R(x,y)}\,(\exists E),1,\delta$$

α: z 相对于 $R(u,y)$ 中的 y 代入自由

β: u 相对于 $R(x,z)$ 中的 x 代入自由

γ: z 不出现在 $\exists x R(x,y)$ 和 $\forall y R(u,y)$ 中

δ: u 不出现在 $\forall y\exists x R(x,y)$ 和 $\forall y R(x,y)$ 中

自然语言：

已知存在一个个体跟任意个体都有关系，将此个体命名为 u。任取 z。
则 u 跟 z 有关系。因此存在一个个体跟 z 有关系。

因为 z 是任取的，所以，对于任意个体 y，存在一个个体跟 y 有关系。

反例 1

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x Q(x)$}
\AxiomC{$\exists x P(x)$}
\AxiomC{$[P(y)]^1$}
\AxiomC{$[Q(y)^2]$}
\RightLabel{$(\wedge \mathrm{I})$}
\BinaryInfC{$P(y) \wedge Q(y)$}
\RightLabel{$(\exists \mathrm{I})$}
\UnaryInfC{$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$}
\RightLabel{$(\exists \mathrm{E}),1 \times$}
\BinaryInfC{$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$}
\RightLabel{$(\exists \mathrm{E}),2$}
\BinaryInfC{$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$}
\end{prooftree}
$$

此例子来自于邢滔滔著《数理逻辑》第 208 页，有改动。

自然语言:

已知有一个偶数，称为 y。已知有一个奇数，称为 y。那么 y 是偶数并且 y 是奇数。

所以，有一个 x 使得 x 是偶数并且 x 是奇数。

反例 2

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y R(x,y)}{\exists y R(x,y)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{[R(x,x)]^1}{\exists z R(z,z)}\,(\exists I)}{\exists z R(z,z)}\,(\exists E),1 \; \times$$

此例子来自于邢滔滔著《数理逻辑》第 208 页，有改动。

自然语言：

已知对于任意一个 x，都有一个 y 使得 y 是 x 的爸爸。那么有一个 y 使得 y 是 x 的爸爸，称为 x。因此 x 是 x 的爸爸。

所以，存在一个 z 使得 z 是 z 的爸爸。

反例 3

以下不是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P(x) \qquad [P(y)]^1}{P(y)}\,(\exists\mathrm{E}),1 \ \times}{\forall y P(y)}\,(\forall\mathrm{I})$$

此例子来自于邢滔滔著《数理逻辑》第 208 页，有改动。

自然语言：

已知有一个偶数，称为 y。那么 y 是偶数。

所以，对于任意一个 y，y 是偶数。

语形后承

令 Γ 是一个 $\mathcal{L}$-公式集且 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。

- φ 是 Γ（在自然演绎系统中）的 $\mathcal{L}$-语形后承，记为$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$，如果存在一个 $\mathcal{L}$-推演使得它用到的前提都属于 Γ 并且它的结论是 φ。
- φ 是（自然演绎系统中的）$\mathcal{L}$-可证的，如果 $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$。
- Γ 是（在自然演绎系统中）$\mathcal{L}$-一致的，如果不存在 $\mathcal{L}$-公式 ψ 使得 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \psi$ 并且 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \neg\psi$。

语形

- 代入、代入自由、规则 (∀E) 和规则 (∃I)
- 规则 ($\doteq$I) 和规则 ($\doteq$E)
- 规则 (∀I) 和规则 (∃E)
- **一个希尔伯特式证明系统**

可靠性定理和完全性定理

希尔伯特式证明系统

希尔伯特式证明系统的核心概念是演绎（deduction）。

直观上，一个演绎是从前提和公理出发、一步一步使用规则进行推理、最后得到结论的过程。

因此，一个希尔伯特式证明系统的关键是公理和推理规则。

一阶逻辑的一个希尔伯特式证明系统由 MP 规则和下一页中的公理（模式）组成。

公理（模式）只涉及全称量词：因为语义上 $\exists x$ 和 $\neg\forall x\neg$ 是一样的，所以原则上语言中不需要有存在量词符号。

演绎、语形后承、可证式的定义类似于命题逻辑希尔伯特式证明系统中的定义。

1. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\psi \to (\varphi \to \psi))$,
   其中 $x_1, \ldots, x_n$ 包含了所有在 $\mathcal{L}$-公式 φ 和 ψ 中出现的个体变元；
2. $\forall x_1 \ldots \forall x_n((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))$,
   其中 $x_1, \ldots, x_n$ 包含了所有在 $\mathcal{L}$-公式 φ、ψ、χ 中出现的个体变元；
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_n((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$,
   其中 $x_1, \ldots, x_n$ 包含了所有在 $\mathcal{L}$-公式 φ 和 ψ 中出现的个体变元；
4. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(t \doteq t)$,
   其中 $x_1, \ldots, x_n$ 包含了所有在 $\mathcal{L}$-项 t 中出现的个体变元；
5. $\forall x_1 \ldots \forall x_n((s \doteq t) \to (\varphi[s/x] \leftrightarrow \varphi[t/x]))$,
   其中 $x_1, \ldots, x_n$ 包含了所有在 $\mathcal{L}$-公式 φ 和 $\mathcal{L}$-项 s 和 t 中出现的个体变元，s 和 t 相对于 φ 中的 x 代入自由；
6. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\forall x\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[t/x])$,
   其中 $\mathcal{L}$-项 t 相对于 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ 中的 x 代入自由；
7. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\forall x(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \psi(x, x_1, \ldots, x_n)) \to (\forall x\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \forall x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)))$;
8. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \forall x\varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$,
   其中 x 不是 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ 的自由变元。

可靠性定理和完全性定理

可靠性定理和完全性定理

令 $\mathcal{L}$ 为一个一阶语言。

可靠性定理

对于任意 $\mathcal{L}$-公式集 Γ 和 $\mathcal{L}$-公式 φ，

$$\text{如果 } \Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi\text{，那么 } \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

完全性定理

对于任意 $\mathcal{L}$-公式集 Γ 和 $\mathcal{L}$-公式 φ，

$$\text{如果 } \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi\text{，那么 } \Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$$

可靠性定理的证明思路

想法：短的水管保持水的干净，比保持干净的水管再长一截的水管也保持水的干净。

我们称一个 $\mathcal{L}$-推演 D 是 "靠谱的"，如果 D 的结论是 D 用到的前提的语义后承。

为了证明可靠性，关键要说明：

1. 如果 D 是最简单的推演，那么 D 是 "靠谱的"。
2. 如果每一个比 D 短的推演是 "靠谱的"，那么 D 也是 "靠谱的"。这里我们根据 D 中最后一步所用的推理规则分11种情况讨论。

完全性定理的证明思路

令 $\mathcal{L}_C$ 表示在 $\mathcal{L}$ 中加入一系列新常元符号 $c_0, c_1, \ldots$ 所得到的语言。

完全性定理可以通过以下两个引理得到:

- **扩张引理**
  每一个 $\mathcal{L}$-一致的公式集都是某个 $\mathcal{L}_C$-Henkin 集的子集。
- **模型引理**
  每一个 $\mathcal{L}_C$-Henkin 集都有一个 $\mathcal{L}_C$-结构和这个结构上的一个指派满足它。

证明其逆否命题。

假设 $\Gamma \nvdash^{ND}_{\mathcal{L}} \varphi$。

可以证明 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 $\mathcal{L}$-一致的。

根据扩张引理，$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是某个 $\mathcal{L}_C$-Henkin 集 Γ^+ 的子集。

根据模型引理，有一个 $\mathcal{L}_C$-结构 $\mathfrak{A}_C$ 和这个结构上的一个指派 ν 满足 Γ^+。

那么 $\mathfrak{A}_C, \nu \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$。

令 $\mathfrak{A}$ 为在 $\mathfrak{A}_C$ 中删掉关于新常元符号的解释而得到的 $\mathcal{L}$-结构。

根据满足关系的特点，$\mathfrak{A}, \nu \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$。

所以 $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}} \varphi$。

Henkin 集的来由

令 $\mathfrak{A}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构，ν 为 $\mathfrak{A}$ 上的一个赋值。

假设对 A 中的每一个元素都有一个 $\mathcal{L}$ 中的常元符号指称它。

注意到 $\mathcal{L}$-公式集 $\{\varphi \mid \varphi是\mathcal{L}\text{-}公式并且\mathfrak{A}, \nu \models \varphi\}$ 具有以下语形性质：

1. 它是 $\mathcal{L}$-一致的。
2. 对于任意 $\mathcal{L}$-公式 φ，$\neg\varphi$ 和 φ 至少有一个在里面。
3. 对于任意 $\mathcal{L}$-公式 φ 和个体变元 x，如果 $\exists x\varphi$ 在里面，那么存在一个 $\mathcal{L}$ 中的常元符号 c 使得 $\varphi[c/x]$ 在里面。

Henkin 集的定义

令 Γ 为一个 $\mathcal{L}$-公式集。

考虑以下性质：

1. Γ 是 $\mathcal{L}$-一致的。
2. 对于任意 $\mathcal{L}$-公式 φ，$\neg\varphi \in \Gamma$ 和 $\varphi \in \Gamma$ 至少有一个成立。
3. 对于任意 $\mathcal{L}$-公式 φ 和个体变元 x，如果 $\exists x\varphi \in \Gamma$，那么存在一个 $\mathcal{L}$ 中的常元符号 c 使得 $\varphi[c/x] \in \Gamma$。

Γ 是一个$\mathcal{L}$-极大一致集，如果它具有上述 1 和 2 两个性质。

Γ 是一个$\mathcal{L}$-Henkin 集，如果它具有上述三个性质。

扩张引理中考虑 $\mathcal{L}_C$ 是为了保证语言中有足够的常元符号使得第 3 个性质成立。

欢迎填写问卷提出宝贵意见！