一阶逻辑理论（上）

形式语言和形式语义

钟盛阳

2023 年春季

北京大学哲学系

语言

- 简单句
- 量词
- 一阶逻辑的形式语言

语义

- 原子公式的语义
- 命题联结词的语义
- 量词的语义

语言

语言

简单句

量词

一阶逻辑的形式语言

语义

原子公式的语义

命题联结词的语义

量词的语义

命题逻辑的局限

命题逻辑对推理的分析不能满足要求。

下面的推理直观上是正确的，但在命题逻辑中它不是因形式而正确的：

$$\frac{a = b \qquad b > 3}{a > 3}$$

问题不在于对命题联结词的分析，而在于对简单（陈述）句的分析。

简单句

简单句由名字和谓词两部分组成。

名字（name)指称一个个体。

谓词（predicate)表达个体的性质或者个体之间的关系。

例子：

- 小明学习成绩好。
- 小明所在的班的班长会弹钢琴。
- 小明和学号为 12345 的学生是同一个人。
- 小明、小刚、小文、小辉是室友。

名字

在数学中，名字有三类：

1. **专名**（proper name）
2. **限定摹状词**（definite description）
3. **变元**（variable）

专名

日常例子:

1. 苏格拉底
2. 克里普克
3. 祈年殿

数学例子:

1. 0
2. $\emptyset$
3. π

限定摹状词：日常的例子

日常例子：

- **北京大学的校长**
  the president of Peking University
- **《三国演义》的作者**
  the author of Romance of the Three Kingdoms
- **苏轼的父亲的妻子**
  the wife of the father of Su Shi

限定摹状词不是专名；但限定摹状词里可能会出现专名，限定摹状词的指称跟它里面出现的专名的指称有关。

限定摹状词：数学例子

数学例子：函数值

我们把一个函数想象成一个黑箱，给黑箱塞入规定范围和规定格式的输入，黑箱会给出输出；而且，对于同一个输入，输出总是同一个。

我们甚至可以如下想象黑箱的机制：黑箱里有一个人，拿着一张**表格**，每当看到有输入的时候就根据表格上的记录给出输出。

一个从集合 A 到集合 B 的函数是一个黑箱，每当输入 A 中的一个元素，输出 B 中的一个元素；而且，对于同一个输入，输出总是同一个。

想象成表格的话，一个从集合 A 到集合 B 的函数是这样一个表格：对于 A 中的每一个元素 a，都有唯一一个 B 中的元素 b 使得表格中有 (a, b) 这条记录。

如果 f 表示一个从 A 到 B 的函数，a 是 A 的一个元素，那么用 $f(a)$ 表示输入 a 时 f 的输出（the f under a）。

- 8^2：8 的平方（the square of 8）
- $|-10|$：10 的绝对值（the absolute value of -10）

n 元函数

n 个个体 $a_1, \ldots, a_n$ **按顺序**排成一列称为一个n 元组，记为 $(a_1, \ldots, a_n)$。

令 A 是一个集合。

用A^n记所有由 A 中的元素组成的 n 元组的集合。

一个A 上的 n 元函数（n-ary function on A）是一个从 A^n 到 A 的函数。

例如：加法和乘法都是 $\mathbb{N}$ 上的二元函数。

变元

数学例子：x，y，z，m，n

(使用字母的的一个好处是该表达式本身不含有关于其指称的任何信息。)

日常例子：

- 那位同学（需配合动作）
- 这支粉笔（需配合动作）

谓词

简单来说，在一个简单句中，除去名字之后剩下的部分就是谓词。

谓词是一个有空位的表达式；在空位中填入名字之后就成为一个简单句。

谓词表达多个个体之间的关系。

把关系看作表格

我们可以把 n 个个体之间的一种关系看成一张记录着一些 n 元组的表格：n 个个体之间具有这种关系，当且仅当这 n 个个体组成的 n 元组在这张表格里。

谓词	关系	例子
… 是… 的父亲	父子关系	(曹操, 曹植) ✓ (曹操, 孙权) ×
… 是… 的姐姐	姐妹关系	(大乔, 小乔) ✓ (曹丕, 曹植) ×
… 大于…	大于关系	$(5,3)$ ✓ $(3,5)$ ×
… 是… 和… 的孩子	孩子-父-母关系	(诸葛瞻，诸葛亮，黄月英) ✓ (刘备，关羽，张飞) ×

集合上的 n 元关系

令 A 是一个集合。

一个A 上的 n 元关系R 是 A^n 的一个子集：$a_1, \ldots, a_n$ 具有该关系，当且仅当 $(a_1, \ldots, a_n) \in R$。

我们可以把一个 A 上的 n 元关系（n-ary relation on A)看成是一个表格：$a_1, \ldots, a_n$ 具有该关系，当且仅当表格中有 $(a_1, \ldots, a_n)$ 这一条记录。

特别地，A 的一个子集是 A 上的一个一元关系，通常称为一个性质。

说明

对于简单句“约翰爱玛丽”，

- 我们可以把“... 爱...”看成一个带有两个空位的谓词，填入“约翰”和“玛丽”两个专名后成为上述简单句；
- 我们也可以把“... 爱玛丽”看成一个带有一个空位的谓词，填入专名“约翰”后成为上述简单句。

如何分析这句话取决于我们的目的。

等词

在数学和其他领域，等同关系都具有重要的意义。

表达等同关系的谓词称为**等词**，等词是一个带有两个空位的谓词。

例子：

- 晨星等同于暮星。
- 鲁迅等同于周树人。

小结

简单句由名字和谓词两部分组成。

名字包括:

- 专名
- 限定摹状词
- 变元

谓词包括:

- 等词
- 表达其他（除了等同关系以外）关系的谓词

语言

简单句

量词

一阶逻辑的形式语言

语义

原子公式的语义

命题联结词的语义

量词的语义

量词

语言中用于表示数量多少的表达式称为**量词**（quantifier）。

在数学中，由于有等词的辅助，我们只需要关心以下两种最极端的量词：

- **全称量词**（universal quantifier）：对于任意一个（x）
- **存在量词**（existential quantifier）：至少有一个（x）/存在一个（x）

例子 1

- 每个人都有唯一一位父亲。

  对于任意一个人 x，存在一个人 y 使得 y 是 x 的父亲并且，对于任意一个人 z，如果 z 是 x 的父亲，那么 z 等同于 y。

- 当今法国国王是秃头

  存在一个人 x 使得 x 是当今法国国王；并且
  对于任意两个人 y 和 z，如果 y 是当今法国国王并且 z 是当今法国国王，那么 y 等同于 z；并且
  对于任意一个人 w，如果 w 是当今法国国王，那么 w 是秃头。
  （罗素对摹状词的分析）

例子 2

亚里士多德关心的陈述句：

- 所有人都会死

  对于任意一个 x，如果 x 是人，那么 x 会死。
- 有的人会死

  存在一个 x 使得 x 是人并且 x 会死。
- 所有人都不会死

  对于任意一个 x，如果 x 是人，那么并非 x 会死。
- 有的人不会死

  存在一个 x 使得 x 是人并且并非 x 会死。

语言

- 简单句
- 量词
- 一阶逻辑的形式语言

语义

- 原子公式的语义
- 命题联结词的语义
- 量词的语义

初始符号——表达简单句

简单句由名字和谓词两部分组成。

名字包括：

- 专名 $\longrightarrow$ 常元符号
- 限定摹状词 $\longrightarrow$ 函数符号
- 个体变元 $\longrightarrow$ 个体变元（$x_0, x_1, \ldots$）

谓词包括：

- 等词 $\longrightarrow$ 等词符号（$\doteq$）
- 表达其他（除了等同关系以外）关系的谓词 $\longrightarrow$ 关系符号

初始符号——表达逻辑形式

量词包括：

- “对于每一个” $\longrightarrow$ 全称量词符号（$\forall$）
- “至少有一个” $\longrightarrow$ 存在量词符号（$\exists$）

命题联结词包括：

- “并非” $\longrightarrow$ 否定符号（$\neg$）
- “并且” $\longrightarrow$ 合取符号（$\wedge$）
- “或者” $\longrightarrow$ 析取符号（$\vee$）
- “如果⋯那么⋯” $\longrightarrow$ 蕴涵符号（$\rightarrow$）

加上技术符号（括号和逗号），就组成了一阶逻辑形式语言的初始符号。

初始符号

每个一阶逻辑形式语言都会有以下符号：

- 个体变元：$x_0, x_1, x_2, \ldots$
- 等词符号：$\doteq$
- 命题联结词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$
- 量词符号：$\forall$，$\exists$
- 技术符号：(，)，,

不同的一阶逻辑形式语言，以下符号，称为**非逻辑符号**，会有不同：

- 常元符号
- 函数符号
- 关系符号

给出一个一阶逻辑形式语言，就是给出这个语言中的常元符号（可以没有）、函数符号（可以没有）及其元数、关系符号（可以没有）及其元数。

$\mathcal{L}$-项——名字

令 $\mathcal{L}$ 为一个一阶逻辑形式语言。

在 $\mathcal{L}$ 中，用于指称个体的符号串称为$\mathcal{L}$-项（$\mathcal{L}$-term）。

定义 $\mathcal{L}$-项的想法：从简单到复杂

每一个常元符号都是（最简单的）$\mathcal{L}$-项。（类比专名）

每一个个体变元都是（最简单的）$\mathcal{L}$-项。

函数符号把 $\mathcal{L}$-项组合成更加复杂的 $\mathcal{L}$-项。（类比限定摹状词）

$\mathcal{L}$-项的定义

1. 每一个常元符号都是一个 $\mathcal{L}$-项；
2. 每一个个体变元都是一个 $\mathcal{L}$-项；
3. 如果 F 是 $\mathcal{L}$ 中的一个 n 元函数符号，$t_1, \ldots, t_n$ 是 n 个 $\mathcal{L}$-项，那么 $F(t_1, \ldots, t_n)$ 是一个 $\mathcal{L}$-项。

有穷次使用以上规则得到的符号串是$\mathcal{L}$-项。

$\mathcal{L}$-项的例子

令 c 是一个常元符号，M 和 F 是两个一元函数符号：

1. 小明	1. c
2. 小明所在的班的班长	2. $M(c)$
3. 小明所在的班的班长的爸爸	3. $F(M(c))$

令 $\overline{3}$ 和 $\overline{7}$ 是两个常元符号，x 是个体变元，$\overline{+}$ 和 $\overline{\times}$ 是两个二元函数符号：

1. x	1. $\overline{x}$
2. 3	2. $\overline{3}$
3. x 加上 3 的和	3. $\overline{+}(x, \overline{3})$
4. 7	4. $\overline{7}$
5. 7 乘以 x 加上 3 的和的积	5. $\overline{\times}(\overline{7}, \overline{+}(x, \overline{3}))$

原子公式——简单句

在 $\mathcal{L}$ 中，表达简单句的符号串称为原子 $\mathcal{L}$-公式（atomic $\mathcal{L}$-formula）。

- 如果 R 是 $\mathcal{L}$ 中的一个 n 元关系符号，$t_1, \ldots, t_n$ 是 n 个 $\mathcal{L}$-项。$R(t_1, \ldots, t_n)$ 是一个原子 $\mathcal{L}$-公式；
- 如果 t_1 和 t_2 是两个 $\mathcal{L}$-项，那么 $(t_1 \doteq t_2)$ 是一个原子 $\mathcal{L}$-公式。

例子：

- 令 B 是一个二元关系符号，接上面的例子：
  $B(F(M(a)), F(a))$：小明所在班的班长的爸爸是小明的爸爸的哥哥。
- 令 y 是一个个体变元，接上面的例子：
  $(\overline{\times}(\overline{7}, \overline{+}(x, \overline{3})) \doteq \overline{+}(\overline{7}, y))$：7 乘以 x 加上 3 的和的积等于 7 加上 y 的和。

$\mathcal{L}$-公式

直观来说，$\mathcal{L}$-公式（formula)就是符合“语法”的符号串。

定义 $\mathcal{L}$-公式的想法：从简单到复杂

每一个原子 $\mathcal{L}$-公式都是（最简单的）$\mathcal{L}$-公式。

命题联结词和量词把 $\mathcal{L}$-公式组合成更加复杂的 $\mathcal{L}$-公式。

$\mathcal{L}$-公式的定义

1. 每一个原子 $\mathcal{L}$-公式都是一个 $\mathcal{L}$-公式；
2. 如果 φ 和 ψ 都是 $\mathcal{L}$-公式，那么 $\neg\varphi$、$(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \to \psi)$ 都是 $\mathcal{L}$-公式；
3. 如果 φ 是 $\mathcal{L}$-公式并且 x 是个体变元，那么 $\forall x\varphi$ 和 $\exists x\varphi$ 都是 $\mathcal{L}$-公式。

有穷次使用以上规则得到的符号串是$\mathcal{L}$-公式。

例子

令

- ϵ, δ, x 都是个体变元；
- a 和 b 是常元符号；
- PR 是一个一元关系符号，D 是一个三元关系符号；
- f 是一个一元函数符号。

(a) ϵ 是一个正实数。
(b) δ 是一个正实数。
(c) x 和 a 的距离严格小于 δ。
(d) $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ。
(e) 如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ
(f) 对于任意 x，如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ
(g) δ 是一个正实数并且，对于任意 x，如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ
(h) 存在一个 δ 使得 δ 是一个正实数并且，对于任意 x，如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ。
(i) 如果 ϵ 是一个正实数，那么存在一个 δ 使得 δ 是一个正实数并且，对于任意 x，如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ。
(j) 对于任意 ϵ，如果 ϵ 是一个正实数，那么存在一个 δ 使得 δ 是一个正实数并且对于任意 x，如果 x 和 a 的距离严格小于 δ，那么 $f(x)$ 和 b 的距离严格小于 ϵ。

1. $PR(\epsilon)$
2. $PR(\delta)$
3. $D(x, a, \delta)$
4. $D(f(x), b, \epsilon)$
5. $(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon))$
6. $\forall x(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon))$
7. $(PR(\delta) \wedge \forall x(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon)))$
8. $\exists \delta(PR(\delta) \wedge \forall x(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon)))$
9. $(PR(\epsilon) \to \exists \delta(PR(\delta) \wedge \forall x(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon))))$
10. $\forall \epsilon(PR(\epsilon) \to \exists \delta(PR(\delta) \wedge \forall x(D(x, a, \delta) \to D(f(x), b, \epsilon))))$

辖域与约束

令 φ 为一个 $\mathcal{L}$-公式，如果 $\mathcal{L}$-公式 $\forall x \psi$（或者 $\exists x \psi$）是 φ 的一部分，那么 ψ 称为量词 $\forall x$（或者 $\exists x$）在 φ 中的这次出现的辖域（scope）。

一个个体变元 x 在一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的一次出现是约束的出现(bounded occurrence)，如果它的这次出现位于量词符号的后面或者位于 φ 中某个量词 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的辖域中。

一个个体变元 x 在一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的一次出现是自由的出现（free occurrence)，如果它的这次出现不是被约束的。

一个个体变元 x 是一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 中是自由变元（free variable)，如果 x 在 φ 中至少有一次自由的出现；

反之，如果 x 在 φ 中没有自由的出现（包括没出现），则称 x 是 φ 的约束变元（bounded variable)。

例子

在以下 $\mathcal{L}$-公式中，蓝色标示个体变元的自由的出现，红色标示个体变元的约束的出现（c 是一个常元符号）：

$$((x \doteq y) \to \forall y(\exists z(x \doteq F(z, c, w)) \wedge P(y, z)))$$

语句

令 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。

φ 是一个$\mathcal{L}$-语句（$\mathcal{L}$-sentence），如果 φ 没有自由变元。

例：

1. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ 是一个语句。
2. $(\forall x P(x) \to \exists y R(x, y))$ 不是一个语句。

小结与一点历史

直观	形式化
专名	常元符号
名字	$\mathcal{L}$-项
谓词	关系符号和等词符号
简单句	原子 $\mathcal{L}$-公式
“对于每一个”	全称量词（$\forall$）
“至少有一个”	存在量词（$\exists$）
陈述句	$\mathcal{L}$-公式

- 与亚里士多德的分析不同，德国逻辑学家弗雷格把简单句分析成名字加谓词的简单句形式，并抽象出量词的概念，创立了现代（数理）逻辑。

语义

与命题逻辑的比较

给定一个一阶逻辑形式语言 $\mathcal{L}$。

以命题逻辑为基础，我们已经知道如何解释命题联结词。

剩下需要解释的符号有：

- $\mathcal{L}$ 中的常元符号；
- $\mathcal{L}$ 中的函数符号；
- $\mathcal{L}$ 中的关系符号；
- 个体变元；
- 等词符号 $\doteq$。
- 量词符号 $\forall$ 和 $\exists$

其中，为了解释原子公式，我们需要解释前 5 类符号。

语言

- 简单句
- 量词
- 一阶逻辑的形式语言

语义

- 原子公式的语义
- 命题联结词的语义
- 量词的语义

简单句的解释

直观来说，简单句表达的内容是个体之间具有关系。

这预设了世界中有：

- 一些个体
- 这些个体之间的一些关系

在这基础上：

- 涉及到的所有个体组成一个集合。
- 每一个专名都固定地指称在这个集合中的一个个体。
- 每一个限定摹状词都表达一个函数。
- 每一个谓词都表达个体之间的一个关系。
- 每一个个体变元都临时地指称在这个集合中的一个个体。

$\mathcal{L}$-结构

我们使用一个$\mathcal{L}$-结构（$\mathcal{L}$-structure）来解释：

- $\mathcal{L}$ 中的常元符号；
- $\mathcal{L}$ 中的函数符号；
- $\mathcal{L}$ 中的关系符号。

所以，一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 需要包含以下信息：

- 一个非空集合 A，涉及的所有个体都在这个集合中；这个集合称为论域（domain）；
- 对于 $\mathcal{L}$ 中的每一个常元符号 c，指出 A 的一个元素 $c^{\mathfrak{A}}$ 作为 c 的解释；
- 对于 $\mathcal{L}$ 中的每一个 n 元函数符号 F，指出 A 上的一个 n 元函数 $F^{\mathfrak{A}}$ 作为 F 的解释；
- 对于 $\mathcal{L}$ 中的每一个 n 元关系符号 R，指出 A 上的一个 n 元关系 $R^{\mathfrak{A}}$ 作为 R 的解释。

例子（1）

令语言 $\mathcal{L}$ 含有以下非逻辑符号：

- 常元符号：w，f
- 一元函数符号：s，k
- 一元关系符号：G
- 二元关系符号：S

例子（2）

- $A = \{$欧阳锋, 黄药师, 洪七公, 一灯大师, 王重阳$\}$
- $w^{\mathfrak{A}} =$ 洪七公，$f^{\mathfrak{A}} =$ 一灯大师
-

$s^{\mathfrak{A}}$	$k^{\mathfrak{A}}$
(欧阳锋, 洪七公)	(欧阳锋, 黄药师)
(黄药师, 一灯大师)	(黄药师, 王重阳)
(洪七公, 黄药师)	(洪七公, 一灯大师)
(一灯大师, 王重阳)	(一灯大师, 欧阳锋)
(王重阳, 欧阳锋)	(王重阳, 洪七公)

- $G^{\mathfrak{A}} = \{$黄药师$\}$
- $S^{\mathfrak{A}} = \{$ (欧阳锋, 洪七公) , (黄药师, 一灯大师) , (洪七公, 黄药师) , (王重阳, 欧阳锋) $\}$

指派

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。

一个$\mathfrak{A}$ 上的指派（assignment on $\mathfrak{A}$)是一个函数 $\nu : \{x_0, x_1, \ldots\} \to A$。

直观上，ν 为每一个个体变元 x 指出 A 中的一个元素 $\nu(x)$ 作为 x 的解释。

例子：$\nu =$
$\{(x_0, \text{欧阳锋}), (x_1, \text{黄药师}), (x_2, \text{洪七公}), (x_3, \text{洪七公}), (x_4, \text{黄药师}), \ldots\}$。

指称——对 $\mathcal{L}$-项的解释

给定一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和一个指派 ν，每一个 $\mathcal{L}$-项都指称（denote）A 中的一个元素：

- 常元符号 c 指称 $c^{\mathfrak{A}}$；
- 个体变元 x 指称 $\nu(x)$；
- 对于一个 n 元函数符号 F 和 n 个 $\mathcal{L}$-项 $t_1, \ldots, t_n$，如果 $t_1, \ldots, t_n$ 分别指称 A 中的元素 $a_1, \ldots, a_n$，那么 $F(t_1, \ldots, t_n)$ 指称 $F^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$。

例子

令 $\nu =$
$\{(x_0, \text{欧阳锋}), (x_1, \text{黄药师}), (x_2, \text{洪七公}), (x_3, \text{洪七公}), (x_4, \text{黄药师}), \ldots\}$。

$\mathcal{L}$-项	解释/指称
w	洪七公
f	一灯大师
x_4	黄药师
$s(w)$	黄药师
$s(s(w))$	一灯大师
$k(s(w))$	王重阳
$s(x_4)$	一灯大师
$s(s(x_4))$	王重阳
$k(s(x_4))$	欧阳锋

满足关系——对 $\mathcal{L}$-公式的解释

给定一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和一个指派 ν，每一个 $\mathcal{L}$-公式都具有了真值。

以下定义$\mathfrak{A}$ 和 ν 满足 φ（或称φ 在 $\mathfrak{A}$ 和 ν 之下为真），记为$\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$。

对原子 $\mathcal{L}$-公式的解释

- $\mathfrak{A}, \nu \models R(t_1, \ldots, t_n)$，当且仅当 $a_1, \ldots, a_n$ 具有 $R^{\mathfrak{A}}$ 关系，其中 $a_1, \ldots, a_n$ 分别是 $t_1, \ldots, t_n$ 的指称；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (t_1 \doteq t_2)$，当且仅当 a_1 和 a_2 具有等同关系，其中 a_1, a_2 分别是 t_1, t_2 的指称。

例子

令 $\nu =$
$\{(x_0, \text{欧阳锋}), (x_1, \text{黄药师}), (x_2, \text{洪七公}), (x_3, \text{洪七公}), (x_4, \text{黄药师}), \ldots\}$。

$\mathcal{L}$-项	解释/指称
w	洪七公
f	一灯大师
x_4	黄药师
$s(s(w))$	一灯大师
$k(s(w))$	王重阳

- $\mathfrak{A}, \nu \models (f \doteq s(s(w)))$：$f$ 和 $s(s(w))$ 都指称一灯大师
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models (x_4 \doteq k(s(w)))$：$x_4$ 指称黄药师，但 $k(s(w))$ 指称王重阳
- $\mathfrak{A}, \nu \models G(x_4)$：$x_4$ 指称黄药师，并且 黄药师 $\in G^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models G(s(s(w)))$：$s(s(w))$ 指称一灯大师，并且 一灯大师 $\notin G^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, \nu \models S(x_4, s(s(w)))$：$x_4$ 指称黄药师，$s(s(w))$ 指称一灯大师，并且 (黄药师, 一灯大师) $\in S^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models S(k(s(w)), f)$：$k(s(w))$ 指称王重阳，f 指称一灯大师，并且 (王重阳, 一灯大师) $\notin S^{\mathfrak{A}}$

语言

- 简单句
- 量词
- 一阶逻辑的形式语言

语义

- 原子公式的语义
- 命题联结词的语义
- 量词的语义

对命题联结词的解释

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。

- $\mathfrak{A}, \nu \models \neg\varphi$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 不成立；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \wedge \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 并且 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \vee \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 或者 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \to \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 不成立或者 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$。

例子

因为 $\mathfrak{A}, \nu \not\models G(s(s(w)))$ 并且 $\mathfrak{A}, \nu \models S(x_4, s(s(w)))$，所以

- $\mathfrak{A}, \nu \models \neg G(s(s(w)))$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models \neg S(x_4, s(s(w)))$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models (G(s(s(w))) \wedge S(x_4, s(s(w))))$
- $\mathfrak{A}, \nu \models (G(s(s(w))) \vee S(x_4, s(s(w))))$
- $\mathfrak{A}, \nu \models (G(s(s(w))) \to S(x_4, s(s(w))))$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models (S(x_4, s(s(w))) \to G(s(s(w))))$

记号

记号 $P(x)$ 表示一个陈述句，其中最多只出现一个变元 x（但 x 可以出现多次）。

记号 $Q(x, y, z)$ 表示一个陈述句，其中最多只出现三个变元 x, y, z（但 x, y, z 均可出现多次）。

全称量词的真值条件

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

假设 $y_1, \ldots, y_n$ 的指称都已经确定。

- 陈述句"对于任意 x，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$"为真，如果无论 x 指称论域里哪一个个体，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 为真。
- 陈述句"对于任意 x，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$"为假，如果存在论域里的一个个体，当 x 指称它的时候，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 为假。

存在量词的真值条件

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

假设 $y_1, \ldots, y_n$ 的指称都已经确定。

- 陈述句“存在一个 x 使得 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$”为真，如果存在论域里的一个个体，当 x 指称它的时候，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 为真。
- 陈述句“存在一个 x 使得 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$”为假，如果无论 x 指称论域里哪一个个体，$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 为假。

对量词的解释

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。

- $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x \varphi$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 对任意 $a \in A$ 成立；
- $\mathfrak{A}, \nu \models \exists x \varphi$，当且仅当存在一个 $a \in A$ 使得 $\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 成立。

其中 $\nu[x|a]$ 表示 $\mathfrak{A}$ 上的一个指派，它对每一个个体变元的解释都和 ν 一样，除了把 x 解释成 a。

例子

令 $\nu =$
$\{(x_0, \text{欧阳锋}), (x_1, \text{黄药师}), (x_2, \text{洪七公}), (x_3, \text{洪七公}), (x_4, \text{黄药师}), \ldots\}$。

$\mathcal{L}$-项	解释/指称
w	洪七公
f	一灯大师
x_4	黄药师
$k(x_4)$	王重阳

- $\mathfrak{A}, \nu \models \exists x_0 S(w, x_0)$
- $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x_0 \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models \exists x_0 \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models \exists x_1 \exists x_2 ((S(x_1, f) \wedge S(x_2, f)) \wedge \neg(x_1 \doteq x_2))$
- $\mathfrak{A}, \nu \not\models \exists x_0 (S(k(x_4), x_0) \wedge G(x_0))$

例子 (1)

$\mathfrak{A}, \nu \models \forall x_0 \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$

- $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}] \models \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}][x_1|\text{王}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}][x_1|\text{黄}] \models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}][x_1|\text{欧}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}][x_1|\text{一}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{王}][x_1|\text{洪}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
- $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}] \models \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}][x_1|\text{王}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}][x_1|\text{黄}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}][x_1|\text{欧}] \models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}][x_1|\text{一}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{黄}][x_1|\text{洪}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
- $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}] \models \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}][x_1|\text{王}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}][x_1|\text{黄}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}][x_1|\text{欧}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}][x_1|\text{一}] \models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{欧}][x_1|\text{洪}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
- $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}] \models \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}][x_1|\text{王}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}][x_1|\text{黄}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}][x_1|\text{欧}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}][x_1|\text{一}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{一}][x_1|\text{洪}] \models S(k(x_0), x_1)$
- $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}] \models \exists x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}][x_1|\text{王}] \models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}][x_1|\text{黄}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}][x_1|\text{欧}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}][x_1|\text{一}] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|\text{洪}][x_1|\text{洪}] \not\models S(k(x_0), x_1)$

例子 (2)

- $\mathfrak{A}, \nu \not\models \exists x_0 \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王] \not\models \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王][x_1|王] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王][x_1|黄] \models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王][x_1|欧] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王][x_1|一] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|王][x_1|洪] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄] \not\models \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄][x_1|王] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄][x_1|黄] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄][x_1|欧] \models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄][x_1|一] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|黄][x_1|洪] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧] \not\models \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧][x_1|王] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧][x_1|黄] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧][x_1|欧] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧][x_1|一] \models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|欧][x_1|洪] \not\models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一] \not\models \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一][x_1|王] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一][x_1|黄] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一][x_1|欧] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一][x_1|一] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|一][x_1|洪] \models S(k(x_0), x_1)$
  - $\xrightarrow{\exists}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪] \not\models \forall x_1 S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪][x_1|王] \models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪][x_1|黄] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪][x_1|欧] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪][x_1|一] \not\models S(k(x_0), x_1)$
    - $\xrightarrow{\forall}$ $\mathfrak{A}, \nu[x_0|洪][x_1|洪] \not\models S(k(x_0), x_1)$

从语义的角度看自由变元与约束变元

令 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表示一个陈述句。

假设 $y_1, \ldots, y_n$ 的指称都已经确定，但 x 的指称未定。

如果 x 是 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 的一个自由变元，那么 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 表达了 x 的指称具有某种性质。

如果 x 是 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 的一个约束变元，那么 $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ 不表达 x 的指称具有某种性质。

在这种情况下，x 可以被统一替换成其他变元，或者通过换个说法消去。

对变元的约束有两种：量词和记号。

例子 1

假设论域为自然数组成的集合。考虑以下陈述句:

存在一个自然数 y 使得 $x = y + 1$。

x 是此陈述句的一个自由变元，y 是此陈述句的一个约束变元。

当 x 指称 0 的时候，此陈述句为假;

当 x 指称除 0 以外的其他自然数的时候，此陈述句为真;

当 x 的指称确定之后，此陈述句就有真值，而且与 y 的指称无关。

此陈述句的意思与以下 y 不出现的陈述句相同:

存在一个自然数使得这个自然数与 1 的和等于 x。

例子 2

假设论域为自然数组成的集合。考虑以下陈述句:

$$\{x \mid \text{存在一个自然数}y\text{使得}x = 2y\}\ \text{是无穷的。}$$

x 和 y 都是此陈述句的约束变元。

此陈述句的意思与以下 x 和 y 都不出现的陈述句相同:

偶数集是无穷的。

满足关系的特点

令 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，$\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，ν 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个指派。

$\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 是否成立取决于对在 φ 中出现的常元符号、函数符号、关系符号的解释以及对φ 中的自由的个体变元的解释。

换句话说，假设 $\mathfrak{B}$ 是一个论域和 $\mathfrak{A}$ 相同的 $\mathcal{L}$-结构，μ 是 $\mathfrak{B}$ 上的指派使得：

1. 对于每一个在 φ 中出现的常元符号 c，$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$；
2. 对于每一个在 φ 中出现的函数符号 F，$F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}}$；
3. 对于每一个在 φ 中出现的关系符号 R，$R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$；
4. 对于每一个 φ 中的自由的个体变元 x，$\nu(x) = \mu(x)$；

那么 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$，当且仅当 $\mathfrak{B}, \mu \models \varphi$。

满足关系的完整定义

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。

- $\mathfrak{A}, \nu \models R(t_1, \ldots, t_n)$，当且仅当 $a_1, \ldots, a_n$ 具有 $R^{\mathfrak{A}}$ 关系，其中 $a_1, \ldots, a_n$ 分别是 $t_1, \ldots, t_n$ 的指称；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (t_1 \doteq t_2)$，当且仅当 a_1 和 a_2 具有等同关系，其中 a_1, a_2 分别是 t_1, t_2 的指称；
- $\mathfrak{A}, \nu \models \neg\varphi$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 不成立；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \wedge \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 并且 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \vee \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 或者 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$；
- $\mathfrak{A}, \nu \models (\varphi \rightarrow \psi)$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 不成立或者 $\mathfrak{A}, \nu \models \psi$；
- $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x\varphi$，当且仅当 $\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 对任意 $a \in A$ 成立；
- $\mathfrak{A}, \nu \models \exists x\varphi$，当且仅当存在一个 $a \in A$ 使得 $\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 成立。

语义后承和有效式

令 $\mathcal{L}$ 是一个一阶逻辑形式语言，Γ 是 $\mathcal{L}$-公式组成的集合且 φ 是 $\mathcal{L}$-公式。

- $\mathfrak{A}$ 和 ν 满足 Γ，记为$\mathfrak{A}, \nu \models \Gamma$，如果 $\mathfrak{A}, \nu \models \gamma$ 对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 成立。
- φ 是 Γ 的一个语义后承，记为$\Gamma \models \varphi$，如果，对于任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 上的指派 ν，若 $\mathfrak{A}, \nu \models \Gamma$，则 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$。
- φ 是一个有效式（validity），如果 $\emptyset \models \varphi$，即 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 上的指派 ν 成立。

例子 1

$$\models_{\mathcal{L}} (\forall x P(x) \to P(y))$$

证明

令 $\mathfrak{A}$ 为任意 $\mathcal{L}$-结构，ν 为 $\mathfrak{A}$ 上任意指派。

假设 $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x P(x)$。

据定义，对于论域中的任意元素 a，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models P(x)$。

据定义，对于论域中的任意元素 a，a 具有性质 $P^{\mathfrak{A}}$。

所以，$\nu(y)$ 具有性质 $P^{\mathfrak{A}}$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models P(y)$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models (\forall x P(x) \to P(y))$。

因为 $\mathfrak{A}$ 和 ν 是任意的，据定义，$\models_{\mathcal{L}} (\forall x P(x) \to P(y))$。

例子 2

$$\models_{\mathcal{L}} (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$$

证明

令 $\mathfrak{A}$ **为任意** $\mathcal{L}$-**结构**，ν **为** $\mathfrak{A}$ **上任意指派**。

假设 $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x(P(x) \to Q(x))$。

再假设 $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x P(x)$。

任取论域中的元素 a。

据第一个假设，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models (P(x) \to Q(x))$。

据第二个假设，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models P(x)$。

所以，**据定义**，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models Q(x)$。

因为 a **是任取的**，**所以**，**对于论域中的任意元素** a，

$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models Q(x)$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models \forall x Q(x)$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$。

因为 $\mathfrak{A}$ **和** ν **是任意的**，**据定义**，
$\models_{\mathcal{L}} (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$。

例子 3

$\models_{\mathcal{L}} (P(y) \to \forall x P(y))$，其中 x 和 y 是不同的个体变元

证明

令 $\mathfrak{A}$ 为任意 $\mathcal{L}$-结构，ν 为 $\mathfrak{A}$ 上任意指派。

假设 $\mathfrak{A}, \nu \models P(y)$。

据定义，$\nu(y)$ 具有 $P^{\mathfrak{A}}$ 性质。

任取论域中的元素 a。

因为 x 和 y 是不同的个体变元，所以据定义 ν 和 $\nu[x|a]$ 对 y 的解释是一样的。

因为 $\nu(y)$ 具有 $P^{\mathfrak{A}}$ 性质，所以 $\nu[x|a](y)$ 具有 $P^{\mathfrak{A}}$ 性质。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models P(y)$。

因为 a 是任取的，所以，对于论域中的任意元素 a，$\mathfrak{A}, \nu[x|a] \models P(y)$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models \forall x P(y)$。

据定义，$\mathfrak{A}, \nu \models (P(y) \to \forall x P(y))$。

因为 $\mathfrak{A}$ 和 ν 是任意的，据定义，$\models_{\mathcal{L}} (P(y) \to \forall x P(y))$。

一阶逻辑和高阶逻辑

一阶逻辑有量词，所有量词中的变元符号指称论域中的元素。

二阶逻辑有量词，一部分量词中的变元符号指称论域中的元素，另一部分量词中的变元符号指称论域的子集。

三阶逻辑有量词，一部分量词中的变元符号指称论域中的元素，一部分量词中的变元符号指称论域的子集，剩余的量词中的变元符号指称论域的子集组成的集合。

. . . . . .

欢迎填写问卷提出宝贵意见!