命题逻辑应用

2023 年春季学期

- 常用逻辑
- 自然语言中的命题逻辑
- 可满足性问题
- 真值函数完全性
- 逻辑与概率

希腊字母表


Αα Alpha al-fah
Ββ Beta bay-tah
Γγ Gamma gam-mah
Δδ Delta del-tah
Εε Epsilon ep-si-lon
Ζζ Zeta zay-tah
Ηη Eta ay-tah
Θθ Theta thay-tah
Ιι Iota eye-o-tah
Κκ Kappa cap-ah
Λλ Lambda lamb-dah
Μμ Mu mew
Νν Nu new
Ξξ Xi zz-eye
Οο Omicron om-e-cron
Ππ Pi pie
Ρρ Rho roe
Σσς Sigma sig-mah
Ττ Tau taw
Υυ Upsilon oop-si-lon
Φφ Phi fie
Χχ Chi k-eye
Ψψ Psi sigh
Ωω Omega o-may-gah

可靠且完全的自然推演系统

- 合取引入与消去
- 析取引入与消去
- 实质蕴含引入与消去
- 否定引入（归谬法）
- 反证法

常用逻辑推理规则

分配律

$$\varphi \land (\alpha \lor \beta) \vdash\dashv (\varphi \land \alpha) \lor (\varphi \land \beta)$$

$$\varphi \lor (\alpha \land \beta) \vdash\dashv (\varphi \lor \alpha) \land (\varphi \lor \beta)$$

德摩根律

$$\neg(\varphi \land \psi) \vdash\dashv \neg\varphi \lor \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \lor \psi) \vdash\dashv \neg\varphi \land \neg\psi$$

常用逻辑推理规则

modus ponens

$$(\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi$$

modus tollens

$$(\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\varphi$$

常用逻辑推理规则

逆否命题

$$\varphi \to \psi \vdash\dashv \neg\psi \to \neg\varphi$$

析取三段论，排除法

$$(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \psi$$

常用逻辑推理规则

排中律

$$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$$

双重否定

$$\neg\neg\varphi \vdash\dashv \varphi$$

爆炸律

$$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$$

自然语言中的命题逻辑

合取的多种表达

- 张三和李四来过北大，王五没有。

合取的多种表达

- 张三和李四来过北大，王五没有。
- 张三和李四是好朋友。

合取的多种表达

- 张三和李四来过北大，王五没有。
- 张三和李四是好朋友。
- P，并且/然而/不过/但是/进一步/特别地/尽管/同时 Q。

合取的多种表达

- 张三和李四来过北大，王五没有。
- 张三和李四是好朋友。
- P，并且/然而/不过/但是/进一步/特别地/尽管/同时 Q。

“尽管 A，但是 B，不过 C，只不过 D，但你也要考虑 E，虽然也有 F...”

合取的多种表达

- 张三和李四来过北大，王五没有。
- 张三和李四是好朋友。
- P，并且/然而/不过/但是/进一步/特别地/尽管/同时 Q。

“尽管 A，但是 B，不过 C，只不过 D，但你也要考虑 E，虽然也有 F...”

“虽然地上湿了，但是天上正在下雨”。

析取

- “... 或...”

析取

- “... 或...”
- “要么... 要么...”

析取

- “... 或...”
- “要么... 要么...”
- “不是... 就是...”

析取

- “… 或…”
- “要么… 要么…”
- “不是… 就是…”

“不是… 就是…”也可以读作“如果并非… 那么就…”。画个真值表

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \to \psi)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

析取

- “… 或…”
- “要么… 要么…”
- “不是… 就是…”

“不是… 就是…”也可以读作“如果并非… 那么就…”。画个真值表

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \to \psi)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

当我们说“要么 ϕ，要么 ψ”的时候，我们有没有排除掉 ϕ 和 ψ 同时成立的情况?

析取

- “… 或…”
- “要么… 要么…”
- “不是… 就是…”

“不是… 就是…”也可以读作“如果并非… 那么就…”。画个真值表

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \to \psi)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

当我们说“要么 ϕ，要么 ψ”的时候，我们有没有排除掉 ϕ 和 ψ 同时成立的情况?
写习题的时候当做没有。

析取

- “... 或...”
- “要么... 要么...”
- “不是... 就是...”

“不是... 就是...”也可以读作“如果并非... 那么就...”。画个真值表

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \to \psi)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

当我们说“要么 ϕ，要么 ψ”的时候，我们有没有排除掉 ϕ 和 ψ 同时成立的情况? 写习题的时候当做没有。

英语法律写作中因为可能的歧义发明了 ‘and/or’。

不相容析取（异或）

我们可以引入一个新的带两个输入的逻辑联结词 $\oplus$（异或，xor）：

φ	ψ	$(\varphi \oplus \psi)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

不相容析取（异或）

我们可以引入一个新的带两个输入的逻辑联结词 $\oplus$（异或，xor）：

φ	ψ	$(\varphi \oplus \psi)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

这个对应着不相容的“或者”：$p \oplus q$ 为真当且仅当 p, q 恰有一个为真。

除非

- “... 除非...”

除非

- “... 除非...”
- “你必须买票，除非你不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米”等价于

除非

- “... 除非...”
- “你必须买票，除非你不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米”等价于
- “要么你不满 12 岁，要么你身高不过 150 厘米，要么你就买票”，也等价于

除非

- “… 除非…”
- “你必须买票，除非你不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米”等价于
- “要么你不满 12 岁，要么你身高不过 150 厘米，要么你就买票”，也等价于
- “如果你不是不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米，那你就必须买票”。

除非

- “... 除非...”
- “你必须买票，除非你不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米”等价于
- “要么你不满 12 岁，要么你身高不过 150 厘米，要么你就买票”，也等价于
- “如果你不是不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米，那你就必须买票”。

“φ 除非 ψ”等价于“$\varphi \vee \psi$”等价于“$\neg\psi \to \varphi$”。

除非

- “... 除非...”
- “你必须买票，除非你不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米”等价于
- “要么你不满 12 岁，要么你身高不过 150 厘米，要么你就买票”，也等价于
- “如果你不是不满 12 岁或者身高不超过 150 厘米，那你就必须买票”。

“φ 除非 ψ”等价于“$\varphi \vee \psi$”等价于“$\neg\psi \to \varphi$”。

注：我们通常不写出公式的最外面一对括号。

比较奇怪的连接词

“无论”和“不管”：“不管你去不去，我都会去。”

比较奇怪的连接词

“无论”和“不管”：“不管你去不去，我都会去。”

似乎“不管 φ 还是 $\neg\varphi$，都有 χ”说的就是 χ。但这个可以理解为字面上我们说的是 $(\varphi \to \chi) \wedge (\neg\varphi \to \chi)$，而这个等价于 χ。

比较奇怪的连接词

“无论”和“不管”：“不管你去不去，我都会去。”

似乎“不管 φ 还是 $\neg\varphi$，都有 χ”说的就是 χ。但这个可以理解为字面上我们说的是 $(\varphi \to \chi) \wedge (\neg\varphi \to \chi)$，而这个等价于 χ。

“就算”和“哪怕”：“就算 A 不去，B 也会去。”

比较奇怪的连接词

“无论”和“不管”：“不管你去不去，我都会去。”

似乎“不管 φ 还是 $\neg\varphi$，都有 χ”说的就是 χ。但这个可以理解为字面上我们说的是 $(\varphi \to \chi) \wedge (\neg\varphi \to \chi)$，而这个等价于 χ。

“就算”和“哪怕”：“就算 A 不去，B 也会去。”

这个至少说了“如果 A 不去，B 就会去”。但这个有没有说“如果 A 去了，B 也会去”？如果说了，那“就算 A 不去，B 也会去”在自然语言语义下语义后承、从而等价于“B 会去”。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

A：如果你有一百万，你愿意捐给国家吗？B：我愿意。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

A：如果你有一百万，你愿意捐给国家吗？B：我愿意。

A：如果你有一头牛，你愿意捐给国家吗？B：我不愿意。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

A：如果你有一百万，你愿意捐给国家吗？B：我愿意。

A：如果你有一头牛，你愿意捐给国家吗？B：我不愿意。

A：为什么？B：因为我真的有一头牛。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

A：如果你有一百万，你愿意捐给国家吗？B：我愿意。

A：如果你有一头牛，你愿意捐给国家吗？B：我不愿意。

A：为什么？B：因为我真的有一头牛。

尽管我们有上面的例子，但我们也通常不会认为下面这个句子是真的

要是我今天没来上课，那月亮就会从天上掉下来。

蕴含

实质蕴涵的特点是只要前件为假则整个蕴含式为真。

例子

A：如果你有一百亩地，你可以捐给国家吗？B：可以！

A：如果你有一百万，你愿意捐给国家吗？B：我愿意。

A：如果你有一头牛，你愿意捐给国家吗？B：我不愿意。

A：为什么？B：因为我真的有一头牛。

尽管我们有上面的例子，但我们也通常不会认为下面这个句子是真的

要是我今天没来上课，那月亮就会从天上掉下来。

数学语境中的“如果... 那么...”都是实质蕴涵。

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”
- “人不犯我，我不犯人。”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”
- “人不犯我，我不犯人。”
- “须知中国不灭，旧法可损益，必不可叛。”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”
- “人不犯我，我不犯人。”
- “须知中国不灭，旧法可损益，必不可叛。”

这究竟是“你要知道：中国终究是不会灭的；旧法可损益，但不可叛”

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”
- “人不犯我，我不犯人。”
- “须知中国不灭，旧法可损益，必不可叛。”

这究竟是“你要知道：中国终究是不会灭的；旧法可损益，但不可叛”

还是“你要知道：若要中国不灭，则旧法可损益，但旧法不可叛”？

蕴含

汉语中有蕴含意味的其它用法：

- “买这个你就亏了。”
- “兼听则明。”

汉语中的蕴含命题有时没有明显指征：

- “知彼知己，百战不殆。”
- “己所不欲，勿施于人”
- “人不犯我，我不犯人。”
- “须知中国不灭，旧法可损益，必不可叛。”

这究竟是“你要知道：中国终究是不会灭的；旧法可损益，但不可叛”

还是“你要知道：若要中国不灭，则旧法可损益，但旧法不可叛”？

“若要 A，则必须要 B”在命题逻辑内应当形式化为 $A \to B$ 或 $\neg B \to \neg A$。

必要和充分条件

严格来说，纯命题逻辑不足以分析必要和充分条件；我们需要一阶或模态逻辑。

必要和充分条件

严格来说，纯命题逻辑不足以分析必要和充分条件；我们需要一阶或模态逻辑。

“只要团结，就会胜利”：团结 $\rightarrow$ 胜利，因为被排除掉的是且仅是团结但没有胜利的可能性。

必要和充分条件

严格来说，纯命题逻辑不足以分析必要和充分条件；我们需要一阶或模态逻辑。

“只要团结，就会胜利”：团结 $\rightarrow$ 胜利，因为被排除掉的是且仅是团结但没有胜利的可能性。

“只有团结，才会胜利”：胜利 $\rightarrow$ 团结，因为被排除掉的是且仅是不团结也胜利的可能性。

必要和充分条件

严格来说，纯命题逻辑不足以分析必要和充分条件；我们需要一阶或模态逻辑。

“只要团结，就会胜利”：团结 $\rightarrow$ 胜利，因为被排除掉的是且仅是团结但没有胜利的可能性。

“只有团结，才会胜利”：胜利 $\rightarrow$ 团结，因为被排除掉的是且仅是不团结也胜利的可能性。

实际运用中“只要... 就...”和“只有... 才...”背后的意思常常是“当且仅当”。

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

“并非只要你在这们课程上得优秀你就会开心。”

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

“并非只要你在这们课程上得优秀你就会开心。”

如果我们将这句话理解为 $\neg(A \rightarrow B)$，那这句话逻辑地推出 A 和 $\neg B$。

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

“并非只要你在这们课程上得优秀你就会开心。”

如果我们将这句话理解为 $\neg(A \to B)$，那这句话逻辑地推出 A 和 $\neg B$。

更合适的理解：

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

“并非只要你在这们课程上得优秀你就会开心。”

如果我们将这句话理解为 $\neg(A \to B)$，那这句话逻辑地推出 A 和 $\neg B$。

更合适的理解：

- 存在一种可能的未来，在其中你在这门课取得了优秀，同时你不开心。

必要和充分条件

命题逻辑对充分和必要条件的形式化的不合适的地方来自于否定。

“并非只要你在这们课程上得优秀你就会开心。”

如果我们将这句话理解为 $\neg(A \to B)$，那这句话逻辑地推出 A 和 $\neg B$。

更合适的理解：

- 存在一种可能的未来，在其中你在这门课取得了优秀，同时你不开心。
- 并非在每一种可能的未来中，如果你在这门课取得了优秀，那你也是开心的。

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

到“等死”部分的推理在补足隐含前提后有效：$\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \vdash r$。

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

到“等死”部分的推理在补足隐含前提后有效：$\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \vdash r$。

- “如果我是缸中之脑，那我就没有手。但我明显有手。所以我不是缸中之脑。”

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

到“等死”部分的推理在补足隐含前提后有效：$\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \vdash r$。

- “如果我是缸中之脑，那我就没有手。但我明显有手。所以我不是缸中之脑。”

有效的推理（否定后件推理）：$\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$。

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

到“等死”部分的推理在补足隐含前提后有效：$\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \vdash r$。

- “如果我是缸中之脑，那我就没有手。但我明显有手。所以我不是缸中之脑。”

有效的推理（否定后件推理）：$\{p \to q, \neg q\} \vdash \neg p$。

- “绝对反战主义是好的，如果所有人都遵守它的话。但不是所有人都持绝对反战主义。所以绝对反战主义不可取。

推理

- “今亡亦死，举大计亦死，等死，死国可乎?”

到“等死”部分的推理在补足隐含前提后有效：$\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \vdash r$。

- “如果我是缸中之脑，那我就没有手。但我明显有手。所以我不是缸中之脑。”

有效的推理（否定后件推理）：$\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$。

- “绝对反战主义是好的，如果所有人都遵守它的话。但不是所有人都持绝对反战主义。所以绝对反战主义不可取。

无效的否定前件推理：$\{p \rightarrow q, \neg p\} \nvdash \neg q$。

较复杂的例子

税法（有改写）

若张三在中国境内有住所，或者无住所而一个纳税年度内在中国境内居住累计满一百八十三天，则张三为居民个人。

若张三在中国境内无住所又不居住，或者无住所而一个纳税年度内在中国境内居住累计不满一百八十三天，则张三为非居民个人。

较复杂的例子

税法（有改写）

若张三在中国境内有住所，或者无住所而一个纳税年度内在中国境内居住累计满一百八十三天，则张三为居民个人。

若张三在中国境内无住所又不居住，或者无住所而一个纳税年度内在中国境内居住累计不满一百八十三天，则张三为非居民个人。

根据分配律，上面的第二段可以改为“若张三在中国境内无住所且在中国境内不居住或在一个纳税年度内居住累计不满一百八十三天，则...”。但这样有歧义风险：$P \wedge (Q \vee R)$ 不等价于 $(P \wedge Q) \vee R$。

较复杂的例子

Hole

[Alice] 如果 Bob 说的是真的，我说的也是真的。

[Bob] Alice 大言不惭，只有 Carol 说的才是真的。

[Carol] 除非 Alice 和 Bob 说得都对，不然我说的就是对的。

上面这个洞里最多有几个人能同时说真话?

较复杂的例子

Hole

[Alice] 如果 Bob 说的是真的，我说的也是真的。

[Bob] Alice 大言不惭，只有 Carol 说的才是真的。

[Carol] 除非 Alice 和 Bob 说得都对，不然我说的就是对的。

上面这个洞里最多有几个人能同时说真话?

令 A, B, C 分别为 Alice, Bob, Carol 表达的命题。则

- $\varphi_A = A \leftrightarrow (B \rightarrow A)$
- $\varphi_B = B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
- $\varphi_C = C \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

较复杂的例子

Hole

[Alice] 如果 Bob 说的是真的，我说的也是真的。

[Bob] Alice 大言不惭，只有 Carol 说的才是真的。

[Carol] 除非 Alice 和 Bob 说得都对，不然我说的就是对的。

上面这个洞里最多有几个人能同时说真话?

令 A, B, C 分别为 Alice, Bob, Carol 表达的命题。则

- $\varphi_A = A \leftrightarrow (B \to A)$
- $\varphi_B = B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
- $\varphi_C = C \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

B 一定为假，从而 A 一定为真。但仅凭以上三条信息，我们无法确定 C 的真值。

较复杂的例子

Hole

[Alice] 如果 Bob 说的是真的，我说的也是真的。

[Bob] Alice 大言不惭，只有 Carol 说的才是真的。

[Carol] 除非 Alice 和 Bob 说得都对，不然我说的就是对的。

上面这个洞里最多有几个人能同时说真话?

令 A, B, C 分别为 Alice, Bob, Carol 表达的命题。则

- $\varphi_A = A \leftrightarrow (B \to A)$
- $\varphi_B = B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
- $\varphi_C = C \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

B 一定为假，从而 A 一定为真。但仅凭以上三条信息，我们无法确定 C 的真值。

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C \not\models C$，并且 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C \not\models \neg C$

较复杂的例子

LSAT

A store is creating a window display featuring four hats and three scarves. The only hats being considered are A, B, C, D, E, and F, and the only scarves being considered are J, K, L, M, and N.

- If A is displayed, then neither B nor L can be displayed.
- B is displayed only if D is displayed.
- C cannot be displayed unless J is displayed.
- D can be displayed only if K is displayed.
- If L is displayed, then M must be displayed.
- F cannot be displayed unless D is not displayed.

较复杂的例子

LSAT

A store is creating a window display featuring four hats and three scarves. The only hats being considered are A, B, C, D, E, and F, and the only scarves being considered are J, K, L, M, and N.

- If A is displayed, then neither B nor L can be displayed. $A \to (\neg B \wedge \neg L)$
- B is displayed only if D is displayed. $B \to D$
- C cannot be displayed unless J is displayed. $\neg C \vee J$ 等价于 $C \to J$
- D can be displayed only if K is displayed. $D \to K$
- If L is displayed, then M must be displayed. $L \to M$
- F cannot be displayed unless D is not displayed $\neg F \vee \neg D$

较复杂的例子

怎么表达“A, B, C, D, E, F 中恰有四个为真”?

较复杂的例子

怎么表达“A, B, C, D, E, F 中恰有四个为真”?

可以枚举所有 15 种情况:

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \neg E \wedge \neg F) \vee \\
&(A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge E \wedge \neg F) \vee \\
&(A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E \wedge F) \vee \\
&\cdots \\
&(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F).
\end{aligned}
$$

较复杂的例子

怎么表达“A, B, C, D, E, F 中恰有四个为真”?

可以枚举所有 15 种情况:

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \neg E \wedge \neg F) \vee \\
&(A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge E \wedge \neg F) \vee \\
&(A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E \wedge F) \vee \\
&\cdots \\
&(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F).
\end{aligned}
$$

这种形式化适合电脑处理，对人帮助不大。

较复杂的例子

LSAT

已知：

- A, B, C, D, E, F 恰有 4 个为真，J, K, L, M, N 恰有 3 个为真：
- $A \to (\neg B \wedge \neg L)$，等价于 $(A \to \neg B) \wedge (A \to \neg L)$，$A$ 和 B, L 都冲突。
- $B \to D$，$C \to J$，$D \to K$，$L \to M$，$\neg F \vee \neg D$

较复杂的例子

LSAT

已知：

- A, B, C, D, E, F 恰有 4 个为真，J, K, L, M, N 恰有 3 个为真：
- $A \to (\neg B \wedge \neg L)$，等价于 $(A \to \neg B) \wedge (A \to \neg L)$，$A$ 和 B, L 都冲突。
- $B \to D$，$C \to J$，$D \to K$，$L \to M$，$\neg F \vee \neg D$

Q1: Which one of the following is a possible display of hats in the window?

(A) A, B, C, F [AB 冲突]
(B) A, C, D, E
(C) A, D, E, F [FD 最多一个]
(D) B, C, D, F [FD 最多一个]
(E) B, C, E, F [B 要求 D]

较复杂的例子

LSAT

已知：

- A, B, C, D, E, F 恰有 4 个为真，J, K, L, M, N 恰有 3 个为真；
- $A \to (\neg B \wedge \neg L)$，等价于 $(A \to \neg B) \wedge (A \to \neg L)$，$A$ 和 B, L 都冲突。
- $B \to D$，$C \to J$，$D \to K$，$L \to M$，$\neg F \vee \neg D$

Q2: If F is displayed, which one of the following must be true?
(A) A is not displayed.
(B) B is not displayed. $F, \neg F \vee \neg D, B \to D \vdash \neg B$
(C) K is not displayed.
(D) L is displayed.
(E) M is displayed.

较复杂的例子

- 说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖。
- 说一句话来保证得大奖。

较复杂的例子

- 说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖。
- 说一句话来保证得大奖。

用 `small` 表示“得小奖”，`big` 表示“得大奖”，A 表示我们说的话。

较复杂的例子

- 说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖。
- 说一句话来保证得大奖。

用 `small` 表示“得小奖”，`big` 表示“得大奖”，A 表示我们说的话。

出题/发奖人会保证“说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖”为真。这句话可以形式化为

$$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big}))$$

较复杂的例子

- 说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖。
- 说一句话来保证得大奖。

用 $\mathtt{small}$ 表示“得小奖”，$\mathtt{big}$ 表示“得大奖”，A 表示我们说的话。

出题/发奖人会保证“说假话不得奖，说真话得大奖或者得小奖”为真。这句话可以形式化为

$$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big}))$$

所以我们需要恰当选择公式 A 使得

$$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big})) \vDash \mathtt{big}\text{，并且}(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big}))\text{有可能为真}$$

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big}))$有可能为真

small	big	A	$\texttt{small} \vee \texttt{big}$	$A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})$	big
1	1	a	1	a =? 1	1
1	0	b	1	b =? 1	0
0	1	c	1	c =? 1	1
0	0	d	0	d =? 0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big}))$有可能为真

small	big	A	small ∨ big	$A \leftrightarrow$ (small ∨ big)	big
1	1	a	1	随意	1
1	0	b	1	b =? 1	0
0	1	c	1	c =? 1	1
0	0	d	0	d =? 0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \lor \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \lor \texttt{big}))$有可能为真

small	big	A	small ∨ big	$A \leftrightarrow (\texttt{small} \lor \texttt{big})$	big
1	1	a	1	随意	1
1	0	b	1	0	0
0	1	c	1	c =? 1	1
0	0	d	0	d =? 0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \lor \mathtt{big})) \vDash \mathtt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \lor \mathtt{big}))$有可能为真

$\mathtt{small}$	$\mathtt{big}$	A	$\mathtt{small} \lor \mathtt{big}$	$A \leftrightarrow (\mathtt{small} \lor \mathtt{big})$	$\mathtt{big}$
1	1	a	1	随意	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c	1	c =? 1	1
0	0	d	0	d =? 0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big})) \vDash \mathtt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big}))$有可能为真

small	big	A	small $\vee$ big	$A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big})$	big
1	1	a	1	随意	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c	1	随意	1
0	0	d	0	d =? 0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big})) \vDash \mathtt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big}))$有可能为真

small	big	A	small $\vee$ big	$A \leftrightarrow$ (small $\vee$ big)	big
1	1	a	1	随意	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c	1	随意	1
0	0	d	0	0	0

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big}))$有可能为真

small	big	A	small ∨ big	$A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})$	big
1	1	a	1	随意	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c	1	随意	1
0	0	1	0	0	0

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \lor \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \lor \texttt{big}))$有可能为真

不满足第二个要求的情况：$A = \neg(\texttt{small} \lor \texttt{big})$

small	big	A	small ∨ big	$A \leftrightarrow$ (small ∨ big)	big
1	1	a = 0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c = 0	1	0	1
0	0	1	0	0	0

“矛盾推出一切。”

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})) \vDash \texttt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big}))$有可能为真

small	big	A	small ∨ big	$A \leftrightarrow$ (small ∨ big)	big
1	1	a = 1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c = 0	1	0	1
0	0	1	0	0	0

三种可行解之一：$A = (\texttt{small} \leftrightarrow \texttt{big})$。这个解保证你大小奖都拿到。

较复杂的例子

$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big})) \vDash \mathtt{big}$，并且$(A \leftrightarrow (\mathtt{small} \vee \mathtt{big}))$有可能为真

small	big	A	small $\vee$ big	$A \leftrightarrow$ (small $\vee$ big)	big
1	1	a = 0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	c = 1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

三种可行解之一：$A = \neg\mathtt{small}$。

较复杂的例子

$$(A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})) \models \texttt{big}$$

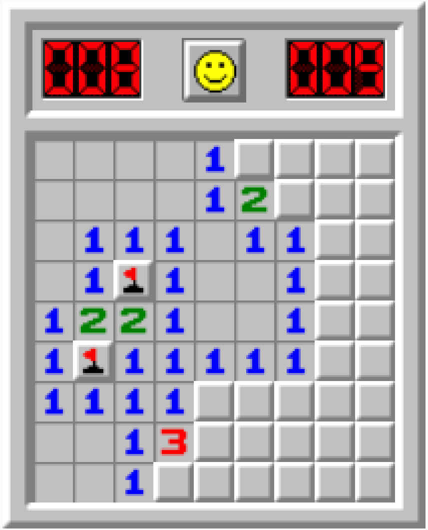
small	big	A	small $\vee$ big	$A \leftrightarrow (\texttt{small} \vee \texttt{big})$	big
1	1	a = 1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	c = 1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

三种可行解之一：$A = (\texttt{small} \rightarrow \texttt{big})$。

可满足性问题（Boolean Satisfiability Problem）

经典逻辑游戏

扫雷：



数独：

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

简化的数独

将 0 或 1 填入 3×3 的格子使得每行和每列都恰有两个 1。

简化的数独

将 0 或 1 填入 3×3 的格子使得每行和每列都恰有两个 1。

我们能同时再要求两个对角线上也恰有两个 1 吗?

形式化数独

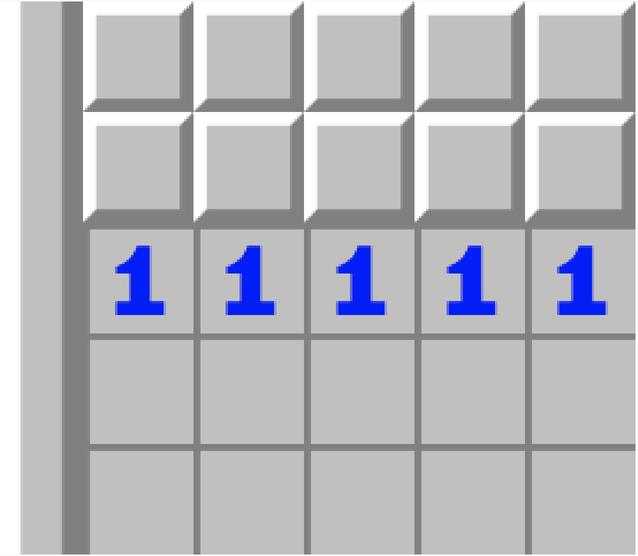
数独本质上是可满足性求解。

我们取 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 个命题符号 $p[1,1,1] \cdots p[9,9,9]$。$p[i,j,k]$ 为真表示数字 k 被填在第 i 行第 j 列。则数独的规则要求：

- 对所有 $i, j, k_1 \neq k_2$: $(\neg p[i,j,k_1] \vee \neg p[i,j,k_2])$；
- 对所有 i, j: $(p[i,j,1] \vee p[i,j,2] \cdots \vee p[i,j,9])$；
- 对所有 $i, k, j_1 \neq j_2$: $(\neg p[i,j_1,k] \vee \neg p[i,j_2,k])$；
- 对所有 $j, k, i_1 \neq i_2$: $(\neg p[i_1,j,k] \vee \neg p[i_2,j,k])$;
- 对所有 k 以及不同但同属于一个九宫格的 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$，$\neg p[i_1,j_1,k] \vee \neg p[i_2,j_2,k]$；
- 若数字 k 出现在 i 行 j 列，则 $p[i,j,k]$。

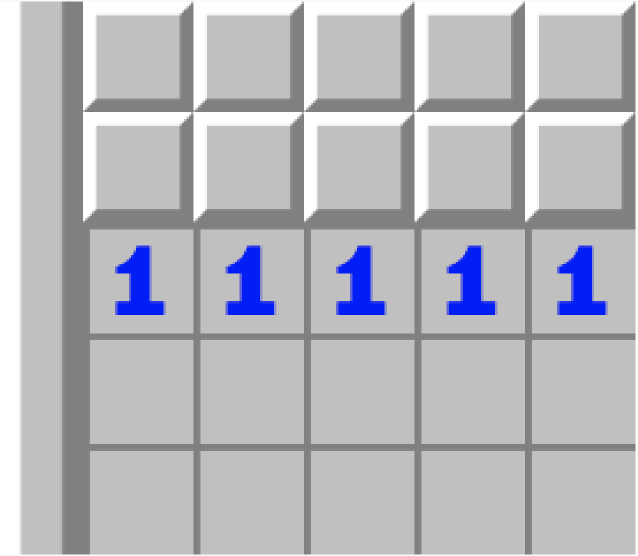
SATsolver 秒杀所有数独。

扫雷：8 个命题中恰有 n 个命题为真。



扫雷与 SAT

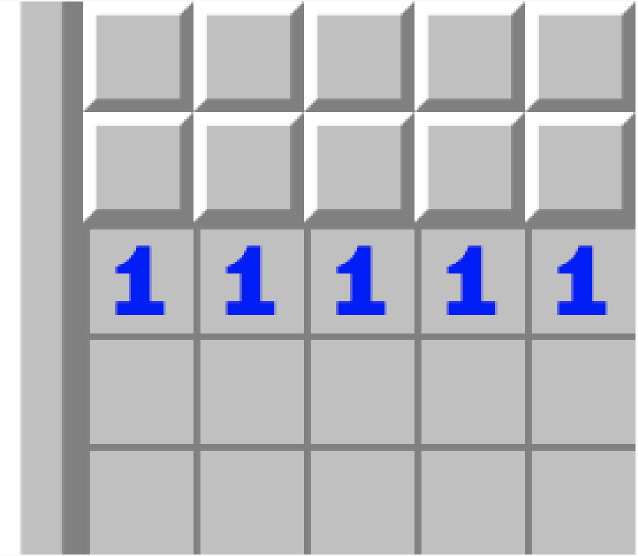
扫雷：8 个命题中恰有 n 个命题为真。



命题逻辑求解器可以用来解扫雷。

扫雷与 SAT

扫雷：8 个命题中恰有 n 个命题为真。



命题逻辑求解器可以用来解扫雷。反过来，扫雷也可以用来求解命题逻辑

地图着色问题

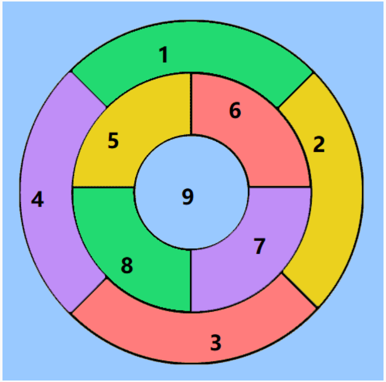
定理

对任何一张有穷平面地图，我们都能将其中所有区域染成 4 种颜色之一使得相邻区域颜色不同。

地图着色问题

定理

对任何一张有穷平面地图，我们都能将其中所有区域染成 4 种颜色之一使得相邻区域颜色不同。



$p[i,k]$: i 区域为颜色 k，则

$(p[i,1] \vee p[i,2] \vee p[i,3] \vee p[i,4])$

$\neg(p[i,1] \wedge p[i,2]) \wedge \cdots \wedge \neg(p[i,3] \wedge p[i,4])$

$p[1,1] \rightarrow (\neg p[4,1] \wedge \neg p[5,1] \wedge \neg p[6,1] \wedge \neg p[2,1])$

对所有相邻 i,j 和所有 k: $\neg p[i,k] \vee \neg p[j,k]$

地图着色问题和紧致性

定理

对任意图（可以无穷），如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。

地图着色问题和紧致性

定理

对任意图（可以无穷），如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。

- 整个图的可 n 染色性可以表示为一个无穷公式集 Γ 的可满足性。

地图着色问题和紧致性

定理

对任意图（可以无穷），如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。

- 整个图的可 n 染色性可以表示为一个无穷公式集 Γ 的可满足性。
- Γ 的每个有穷公式集 Γ_0 只涉及原图的一个有穷部分，由于该有穷部分可 n 染色，Γ_0 可满足。

地图着色问题和紧致性

定理

对任意图（可以无穷），如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。

- 整个图的可 n 染色性可以表示为一个无穷公式集 Γ 的可满足性。
- Γ 的每个有穷公式集 Γ_0 只涉及原图的一个有穷部分，由于该有穷部分可 n 染色，Γ_0 可满足。
- 满足每一个 Γ 的有穷子集的赋值很可能不一样，但紧致性说 Γ 可满足。

定理

对任意图（可以无穷），如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。

- 整个图的可 n 染色性可以表示为一个无穷公式集 Γ 的可满足性。
- Γ 的每个有穷公式集 Γ_0 只涉及原图的一个有穷部分，由于该有穷部分可 n 染色，Γ_0 可满足。
- 满足每一个 Γ 的有穷子集的赋值很可能不一样，但紧致性说 Γ 可满足。
- 满足 Γ 的赋值给出原图的一个 n 染色。

SAT 的工业应用

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

SAT 的工业应用

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

基本流程：

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

基本流程：

- 写一个公式 φ 使得满足 φ 的赋值直观上恰好表达某个你关心的东西的一个可能的状态演化序列

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

基本流程：

- 写一个公式 φ 使得满足 φ 的赋值直观上恰好表达某个你关心的东西的一个可能的状态演化序列
- 然后写一个公式 ψ 使得满足 ψ 的赋值都直观上表示必须要避免的状态

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

基本流程：

- 写一个公式 φ 使得满足 φ 的赋值直观上恰好表达某个你关心的东西的一个可能的状态演化序列
- 然后写一个公式 ψ 使得满足 ψ 的赋值都直观上表示必须要避免的状态
- 然后判断 $\varphi \wedge \psi$ 是不是可满足的

若你有足够多的命题字母，你就可以完整地描述一个较复杂的东西的状态以至于你可以把状态之间的转移关系通过逻辑公式写出来。

基本流程：

- 写一个公式 φ 使得满足 φ 的赋值直观上恰好表达某个你关心的东西的一个可能的状态演化序列
- 然后写一个公式 ψ 使得满足 ψ 的赋值都直观上表示必须要避免的状态
- 然后判断 $\varphi \wedge \psi$ 是不是可满足的

比较适合的场景：交通和医疗上的小型控制器的形式化验证。

SAT 的工业应用

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

SAT 的工业应用

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

两个公式：

$$\begin{aligned}
\alpha(p, q) &= (p \wedge \neg q), \\
\beta(p, q, r, p', q') &= (r \to ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \to ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q))) \\
&= (p' \leftrightarrow (p \oplus r)) \wedge (q' \leftrightarrow (q \oplus r))
\end{aligned}$$

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

两个公式：

$$\begin{aligned}\alpha(p, q) &= (p \wedge \neg q),\\ \beta(p, q, r, p', q') &= (r \rightarrow ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \rightarrow ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q)))\\ &= (p' \leftrightarrow (p \oplus r)) \wedge (q' \leftrightarrow (q \oplus r))\end{aligned}$$

那么下面的公式就描述了所有可能的状态演化序列：

$$\begin{aligned}\{&\alpha(\text{左灯}_0, \text{右灯}_0),\\ &\beta(\text{左灯}_0, \text{右灯}_0, \text{按开关}_0, \text{左灯}_1, \text{右灯}_1),\\ &\beta(\text{左灯}_1, \text{右灯}_1, \text{按开关}_1, \text{左灯}_2, \text{右灯}_2), \ldots\\ &\beta(\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i, \text{左灯}_{i+1}, \text{右灯}_{i+1}) \ldots\}\end{aligned}$$

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

两个公式：

$$\alpha(p,q) = (p \wedge \neg q),$$
$$\beta(p,q,r,p',q') = (r \to ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \to ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q)))$$

为了证明对任意 i，$\text{左灯}_i \vee \text{右灯}_i$，我们证明 $\text{左灯}_i \oplus \text{右灯}_i$：

很简单的例子：三组原子命题

$$左灯_i, 右灯_i, 按开关_i$$

两个公式：

$$\alpha(p, q) = (p \wedge \neg q),$$
$$\beta(p, q, r, p', q') = (r \rightarrow ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \rightarrow ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q)))$$

为了证明对任意 i，$左灯_i \vee 右灯_i$，我们证明 $左灯_i \oplus 右灯_i$：

- $\alpha(p, q) \vDash p \oplus q$

SAT 的工业应用

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

两个公式：

$$\alpha(p,q) = (p \wedge \neg q),$$
$$\beta(p,q,r,p',q') = (r \rightarrow ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \rightarrow ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q)))$$

为了证明对任意 i，$\text{左灯}_i \vee \text{右灯}_i$，我们证明 $\text{左灯}_i \oplus \text{右灯}_i$：

- $\alpha(p,q) \vDash p \oplus q$
- $p \oplus q, \beta(p,q,r,p',q') \vDash p' \oplus q'$

SAT 的工业应用

很简单的例子：三组原子命题

$$\text{左灯}_i, \text{右灯}_i, \text{按开关}_i$$

两个公式：

$$\alpha(p,q) = (p \wedge \neg q),$$
$$\beta(p,q,r,p',q') = (r \rightarrow ((p' \leftrightarrow \neg p) \wedge (q' \leftrightarrow \neg q))) \wedge (\neg r \rightarrow ((p' \leftrightarrow p) \wedge (q' \leftrightarrow q)))$$

为了证明对任意 i，$\text{左灯}_i \vee \text{右灯}_i$，我们证明 $\text{左灯}_i \oplus \text{右灯}_i$：

- $\alpha(p,q) \models p \oplus q$
- $p \oplus q, \beta(p,q,r,p',q') \models p' \oplus q'$
- $p \oplus q \models p \vee q$

真值函数完全性

真值函数

每一个命题逻辑公式 $\varphi(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 本质上都是在表达一个从 n 个 01 取值的输入到一个 01 取值的输出的真值函数。

真值函数

每一个命题逻辑公式 $\varphi(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 本质上都是在表达一个从 n 个 01 取值的输入到一个 01 取值的输出的真值函数。

定义

一组命题联结词是真值函数完全的当且仅当任何一个真值函数都能用一个只使用这一组命题联结词的命题逻辑公式表达。

观察

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是真值函数完全的。

真值函数完全性

$\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ 都是真值函数完全的。

$\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是真值函数完全的。

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是真值函数完全的。

真值函数完全性

定理

“与非”（NAND）联结词自身是真值函数完全的。

φ	ψ	$\varphi \uparrow \psi$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$\varphi \uparrow \varphi$ 表示否定，$(\varphi \uparrow \varphi) \uparrow (\psi \uparrow \psi)$ 表示合取。

我们习惯于用一串 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 数码来表示所有自然数，但其实只用 $0, 1$ 也很好：

逻辑与算术

我们习惯于用一串 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 数码来表示所有自然数，但其实只用 $0, 1$ 也很好：

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, \ldots$$

二进制加法：

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & . & 1. & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

我们习惯于用一串 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 数码来表示所有自然数，但其实只用 $0, 1$ 也很好：

$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, \ldots$

二进制加法：

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & . & 1. & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

对于某一位上的加法，我们给定的输入是被加数的 01 值 a，加数的 01 值 b，以及上一位的进位 c。此时注意到

我们习惯于用一串 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 数码来表示所有自然数，但其实只用 $0, 1$ 也很好：

$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, \ldots$

二进制加法：

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & . & 1. & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

对于某一位上的加法，我们给定的输入是被加数的 01 值 a，加数的 01 值 b，以及上一位的进位 c。此时注意到

- 这一位需要进位当且仅当 a, b, c 中至少有两个 1。这当且仅当 $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$ 为真。

我们习惯于用一串 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 数码来表示所有自然数，但其实只用 $0, 1$ 也很好：

$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, \ldots$

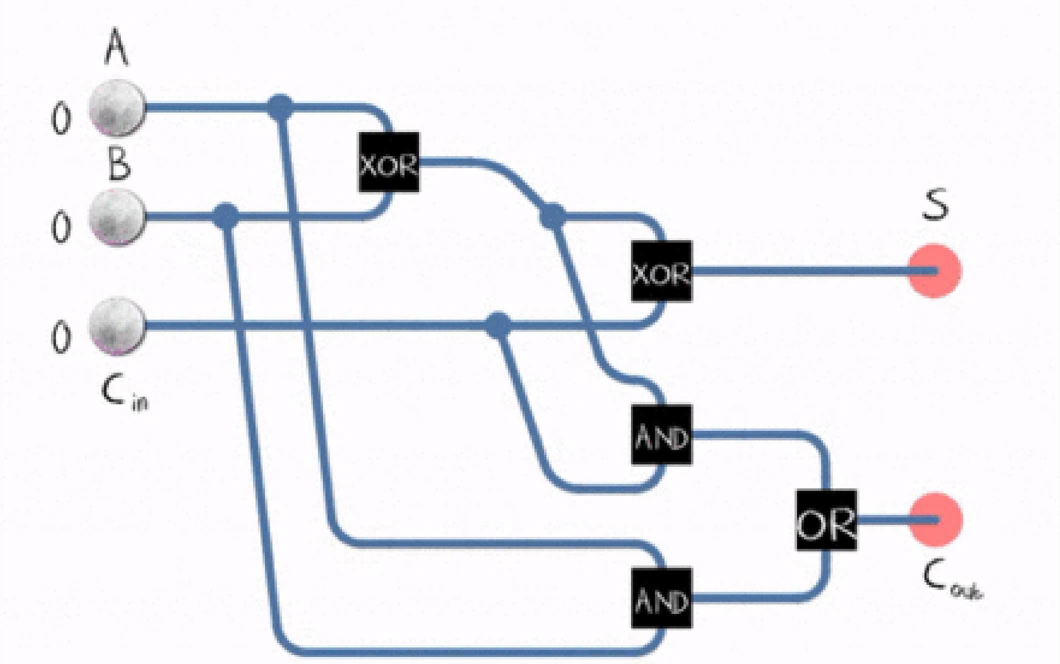
二进制加法：

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & . & 1. & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

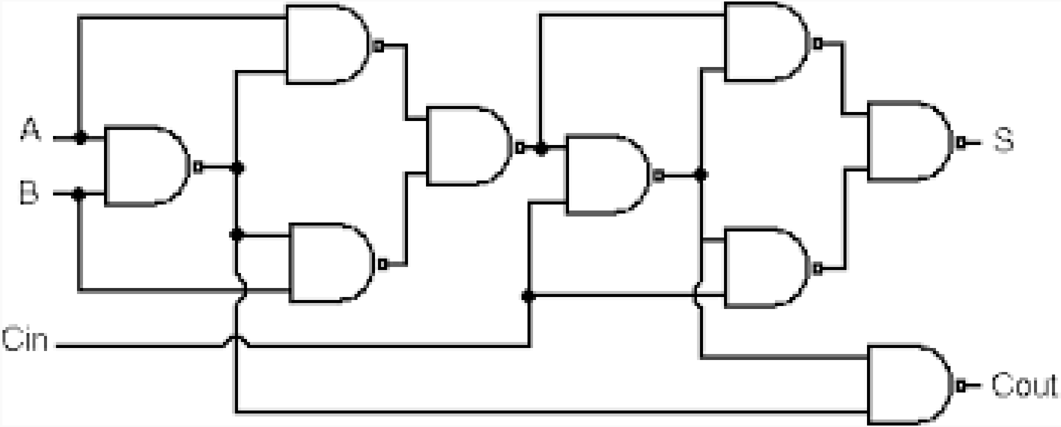
对于某一位上的加法，我们给定的输入是被加数的 01 值 a，加数的 01 值 b，以及上一位的进位 c。此时注意到

- 这一位需要进位当且仅当 a, b, c 中至少有两个 1。这当且仅当 $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$ 为真。
- 这一位实际输出为 1 当且仅当 a, b, c 中恰好有一个 1 或三个 1。这当且仅当 $(a \oplus (b \oplus c))$ 为真。

全加器的电路图



真値函数完全性



逻辑与概率

定义

$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \vDash_{\text{很有可能}} \psi$：如果每一个 ϕ_i 都很有可能，那 ψ 也很有可能。

定义

$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \models_{\text{很有可能}} \psi$：如果每一个 ϕ_i 都很有可能，那 ψ 也很有可能。

重言式都很有可能。

定义

$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \vDash_{\text{很有可能}} \psi$：如果每一个 ϕ_i 都很有可能，那 ψ 也很有可能。

重言式都很有可能。

如果 $\{\phi\} \vDash \psi$，那 $\phi \vDash_{\text{很有可能}} \psi$。

定义

$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \vDash_{\text{很有可能}} \psi$：如果每一个 ϕ_i 都很有可能，那 ψ 也很有可能。

重言式都很有可能。

如果 $\{\phi\} \vDash \psi$，那 $\phi \vDash_{\text{很有可能}} \psi$。

我们知道 $\{\phi, \psi\} \vDash (\phi \wedge \psi)$。但是我们有 $\{\phi, \psi\} \vDash_{\text{很有可能}} (\phi \wedge \psi)$ 吗?

逻辑与概率

如果我们把“很有可能”定义为“概率大于等于 2/3”，那

$$\{p_0, p_1, p_2, \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)\} \vDash_{\text{很有可能}} ((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_2))$$

如果我们把“很有可能”定义为“概率大于等于 2/3”，那

$$\{p_0, p_1, p_2, \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)\} \vDash_{\text{很有可能}} ((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_2))$$

如果有三个事件都很有可能，但三个一起发生很不可能，那“这三个事件里面至少有两个发生”很有可能。

命题逻辑的限制

本质上有穷的问题都可以在使用足够多的命题符号后用命题逻辑表达。

本质上有穷的问题都可以在使用足够多的命题符号后用命题逻辑表达。

- “有的人喜欢唱歌。”

命题逻辑的限制

本质上有穷的问题都可以在使用足够多的命题符号后用命题逻辑表达。

- “有的人喜欢唱歌。”

你可以用一个数十亿的析取公式使用数十亿个命题符号表达这个句子。这不仅太长了，还要求你在语言层面就完全说清楚有哪些人。我们在做关于人的推理的时候不需要预先知道到底有多少人存在。

命题逻辑的限制

本质上有穷的问题都可以在使用足够多的命题符号后用命题逻辑表达。

- “有的人喜欢唱歌。”

你可以用一个数十亿的析取公式使用数十亿个命题符号表达这个句子。这不仅太长了，还要求你在语言层面就完全说清楚有哪些人。我们在做关于人的推理的时候不需要预先知道到底有多少人存在。

对于“每一个自然数都有一个比它大的自然数，所以有无穷多个自然数”，“如果上帝必然存在，那么上帝存在”，命题逻辑和三段论都无能为力。