（经典）命题逻辑理论（下）

可靠性完全性定理与希尔伯特式证明系统

钟盛阳

2023 年春季

北京大学哲学系

约定

根据真值函数完全性，以下我们只考虑 $\neg$ 和 $\to$ 两个命题联结词符号。

特别地，自然演绎系统只有 5 条规则：(A)，($\to$I)，($\to$E)，($\neg$I) 和 (RAA)。

可靠性定理与完全性定理

回顾王老师介绍过的图景：

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然语言:} \arrow[d, "\text{精确化}"] & \text{句子} & \text{句子} \\
\text{形式语言:} \arrow[d, dash, "\text{真值语义}"] & \text{公式} \arrow[r, "\text{语法后承 }(\vdash)", "\text{推理系统}"'] \arrow[d, dash, "\text{语义}"] & \text{公式} \arrow[d, dash, "\text{语义}"] \\
\text{模型:} & \text{性质} \arrow[r, "\text{语义后承 }(\vDash)", "\text{保真}"'] & \text{性质} \\
\text{世界:} \arrow[u, "\text{抽象化}"] & \text{事实} & \text{事实}
\end{tikzcd}
$$

（强）可靠性定理与完全性定理

（强）可靠性定理（(Strong) Soundness Theorem）

对于任意公式集 Γ 和 φ，如果 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$，那么 $\Gamma \models \varphi$。

（强）完全性定理（(Strong) Completeness Theorem）

对于任意公式集 Γ 和 φ，如果 $\Gamma \models \varphi$，那么 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。

意义：

在可以使用可靠性定理和完全性定理的情况下:

- 不想写推演，可以画真值表；
- 不想画真值表，可以写推演。

可靠性定理与完全性定理

（强）可靠性定理

弱完全性定理

强完全性定理——基于紧致性定理的证明

强完全性定理——基于极大一致集的证明

希尔伯特式证明系统

（强）可靠性定理

对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$，那么 $\Gamma \models \varphi$。

证明

思路：短的水管保持水的干净，比保持干净的水管再长一截的水管也保持水的干净。

具体步骤

我们称一个推演 D 是“靠谱的”，如果 D 的结论是 D 用到的前提的语义后承。

为了证明可靠性，关键要说明：

1. 如果 D 是最简单的推演，那么 D 是“靠谱的”。
2. 如果每一个比 D 短的推演是“靠谱的”，那么 D 也是“靠谱的”。

最简单的推演

考虑 D 是最简单的推演的情况。

最简单的推演就是使用一次规则 (A) 的推演，所以 D 形如:

$$\varphi$$

D 用到的前提是 φ，D 的结论是 φ。

因为 $\{\varphi\} \models \varphi$，所以 D 是“靠谱的”。

从“靠谱的”推演到“靠谱的”推演

我们要证明：如果每一个比 D 短的推演是“靠谱的”，那么 D 也是“靠谱的”。

假设每一个比 D 短的推演是“靠谱的”。

我们根据 D 中最后一步所用的推理规则分 5 种情况讨论：

1. 规则 (A)：证明同上一页
2. 规则 ($\rightarrow$I)：留作练习
3. 规则 ($\rightarrow$E)：留作练习
4. 规则 ($\neg$I)：留作练习
5. 规则 (RAA)：示例

最后一步使用规则 (RAA) 的推演

考虑 D 的最后一步使用的是规则 (RAA)。

此时 D 形如:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ D_1\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ D_2\\ \neg\psi\end{array}}{\varphi}\,(\mathrm{RAA})$$

用 Γ 记由 D 用到的前提所组成的公式集。

那么 D_1 用到的前提都在 $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ 里并且其结论是 ψ，D_2 用到的前提都在 $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ 里并且其结论是 $\neg\psi$。

因为 D_1 和 D_2 都是比 D 短的推演，所以它们都是“靠谱的”，所以 $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}\models\psi$ 并且 $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}\models\neg\psi$。

因此，对于任意赋值 V，如果 V 满足 Γ，那么 V 满足 φ；否则 V 满足 $\neg\varphi$，进而 V 同时满足 ψ 和 $\neg\psi$，与赋值的定义矛盾。

可靠性定理与完全性定理

- （强）可靠性定理
- 弱完全性定理
- 强完全性定理——基于紧致性定理的证明
- 强完全性定理——基于极大一致集的证明

希尔伯特式证明系统

弱完全性定理

弱完全性定理 (Weak Completeness Theorem)

对于任意 $\varphi \in Form$，如果 $\emptyset \models \varphi$，那么 $\emptyset \vdash^{ND} \varphi$。

证明的想法是用语形的概念去模仿语义的概念。

但是，重言式是一个高级概念，难以直接用可证公式的概念去模仿。我们需要从初始/低级概念开始。

最基本的语义概念是真，所以我们的入手处是用语形的概念去模仿真值表的计算。

一个公式 φ 的真值可以有 T 和 F 两个，我们用 φ 和 $\neg\varphi$ 去模仿。公式的真值和出现在它里面的命题变元的真值之间的关系，我们用语形后承去模仿。

弱完全性定理的证明——思路示例

p	q	$(p \to (q \to p))$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	T

我们用以下四个语形后承关系分别模拟真值表的四行：

- $\{\neg p, \neg q\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$
- $\{\neg p, q\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$
- $\{p, \neg q\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$
- $\{p, q\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$

我们可以把前两个语形后承关系对应的两个推演拼成一个关于 $\{\neg p\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$ 的推演；把后两个语形后承关系对应的两个推演拼成一个关于 $\{p\} \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$ 的推演。

最后我们把这两个推演拼成一个关于 $\emptyset \vdash^{ND} (p \to (q \to p))$ 的推演。

弱完全性定理的证明——具体步骤（一）

令 V 是一个赋值。

一般地，定义从公式组成的集合到它自身的函数 $\cdot^V$ 如下：

对于任意公式 φ，

$$\varphi^V = \begin{cases} \varphi & \text{如果} V(\varphi) = \mathrm{T} \\ \neg\varphi & \text{如果} V(\varphi) = \mathrm{F} \end{cases}$$

引理 1

对于任意公式 φ，令 $q_1, \ldots, q_n$ 为出现在它里面的所有命题变元，那么 $\{q_1^V, \ldots, q_n^V\} \vdash^{ND} \varphi^V$。

弱完全性定理的证明——具体步骤（二）

这一步的核心是证明赋值的定义的条件所对应的语形后承关系：

p	$\neg p$		
F	T	- - - -	$\{\neg p\} \vdash \neg p$
T	F	- - - -	$\{p\} \vdash \neg\neg p$

p	q	$(p \to q)$		
F	F	T	- - - -	$\{\neg p, \neg q\} \vdash (p \to q)$
F	T	T	- - - -	$\{\neg p, q\} \vdash (p \to q)$
T	F	F	- - - -	$\{p, \neg q\} \vdash \neg(p \to q)$
T	T	T	- - - -	$\{p, q\} \vdash (p \to q)$

弱完全性定理的证明——具体步骤（三）

引理 2

对于任意公式集 Γ 和公式 φ 和 ψ，如果 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash^{ND} \psi$ 和 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash^{ND} \psi$，那么 $\Gamma \vdash^{ND} \psi$。

引理 3

对于任意公式 φ、自然数 n 和命题字母 $q_1, \ldots, q_n$，如果 $\{q_1^V, \ldots, q_n^V\} \vdash^{ND} \varphi$ 对任意赋值 V 成立，那么 $\emptyset \vdash^{ND} \varphi$。

可靠性定理与完全性定理

- （强）可靠性定理
- 弱完全性定理
- 强完全性定理——基于紧致性定理的证明
- 强完全性定理——基于极大一致集的证明

希尔伯特式证明系统

强完全性定理

对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果 $\Gamma \models \varphi$，那么 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。

证明

假设 $\Gamma \models \varphi$。

据定义没有赋值满足 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$。

据紧致性定理，存在自然数 n 和 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ 使得没有赋值满足 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\varphi\}$。

所以 $\emptyset \models (\psi_1 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi)\ldots))$。

据弱完全性定理，$\emptyset \vdash^{ND} (\psi_1 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi)\ldots))$。

连续使用规则 $(\to\mathrm{E})$，$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash^{ND} \varphi$。

因为 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$，所以 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。

可靠性定理与完全性定理

- （强）可靠性定理
- 弱完全性定理
- 强完全性定理——基于紧致性定理的证明
- 强完全性定理——基于极大一致集的证明

希尔伯特式证明系统

强完全性定理的直接证明

对于任意公式集 Γ 和公式 φ，

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma \models \varphi & \Rightarrow & \Gamma \vdash^{ND} \varphi \\
 & \Updownarrow & \\
\Gamma \nvdash^{ND} \varphi & \Rightarrow & \Gamma \not\models \varphi \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
\Gamma \cup \{(\neg\varphi)\} \text{ 是一致的} & \overset{(*)}{\Rightarrow} & \text{有一个赋值满足 } \Gamma \cup \{(\neg\varphi)\}
\end{array}$$

要证明强完全性，只需证明：

每一个一致集都有某个赋值满足它。

赋值与极大一致集

命题

对于任意赋值 V，公式集 $\{\varphi \mid V(\varphi) = \mathrm{T}\}$ 满足以下性质：

1. $\{\varphi \mid V(\varphi) = \mathrm{T}\}$ 一致；
2. 对于任意公式 ψ，$\psi \in \{\varphi \mid V(\varphi) = \mathrm{T}\}$ 或者 $\neg\psi \in \{\varphi \mid V(\varphi) = \mathrm{T}\}$。

定义

具有以上两个性质的公式集称为极大一致集（maximal consistent set）。

极大一致集的基本性质

我们的想法是通过极大一致集从语形方面去模仿语义方面的、形如 $\{\varphi \mid V(\varphi) = \mathrm{T}\}$ 的公式集。

命题

令 Δ 是一个极大一致集。对于任意公式 φ 和 ψ:

1. $\neg\varphi \in \Delta$，当且仅当 $\varphi \notin \Delta$；
2. $(\varphi \to \psi) \in \Delta$，当且仅当 $\varphi \notin \Delta$ 或者 $\psi \in \Delta$。

再看赋值与极大一致集

真值引理（Truth Lemma）

令 Δ 是一个极大一致集。定义 V^{Δ} 如下：

对于任意公式 φ，如果 $\varphi \in \Delta$，$V^{\Delta}(\varphi) = \mathrm{T}$；如果 $\varphi \notin \Delta$，$V^{\Delta}(\varphi) = \mathrm{F}$。

V^{Δ} 是一个赋值，并且 $V^{\Delta} \models \Delta$。

证明思路

先证明 V^{Δ} 是一个函数，然后施归纳于公式结构证明赋值需要满足的性质。

Lindenbaum **引理**

每一个一致集都是某个极大一致集的子集。

证明思路

将所有公式排成一列，依次考虑每一个公式。

如果该公式加入当前公式集后公式集保持一致，那么就将该公式加入当前公式集得到一个更大的公式集，然后考虑下一个公式；否则，不改变当前公式集，然后考虑下一个公式。

考虑完所有公式之后得到的公式集是一个极大一致集。

强完全性定理的证明

假设 $\Gamma \nvdash^{ND} \varphi$。

此时 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是一致的。

据 Lindenbaum 引理，$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是某个极大一致集，记为 Δ，的子集。

根据真值引理，$V^{\Delta} \models \Delta$，所以 $V^{\Delta} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$。

故 $\Gamma \not\models \varphi$。

希尔伯特式证明系统

可靠性定理与完全性定理

- （强）可靠性定理
- 弱完全性定理
- 强完全性定理——基于紧致性定理的证明
- 强完全性定理——基于极大一致集的证明

希尔伯特式证明系统

我们介绍命题逻辑的另一个形式系统:

希尔伯特式证明系统（Hilbert-style proof system）

希尔伯特式证明系统

希尔伯特式证明系统的核心概念是演绎（deduction）。

直观上，一个演绎是从前提和公理出发、一步一步使用规则进行推理、最后得到结论的过程。

因此，一个希尔伯特式证明系统的关键是公理和推理规则。

命题逻辑希尔伯特式证明系统的公理和推理规则

对于任意公式 φ, ψ, χ，以下公式都是公理：

1. $(\psi \to (\varphi \to \psi))$
2. $((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))$
3. $((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$

推理规则是**分离规则**（Modus Ponens）：

- 从公式 φ 和公式 $(\varphi \to \psi)$ 推出 ψ

演绎

令 n 是一个自然数，Γ 是一个公式集，$\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ 都是公式。

公式序列 $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ 是一个**从 Γ 到 φ 的演绎**（deduction），如果 ψ_n 是 φ 并且，对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，ψ_i 至少满足以下条件之一：

1. $\psi_i \in \Gamma$；
2. ψ_i 是公理；
3. 存在 $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$ 使得 ψ_i 是对 ψ_j 和 ψ_k 应用 MP 规则得到的。

对于一个演绎 $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$，n 称为它的**长度**（length）。

（φ 的一个）证明是一个从 $\emptyset$ 到 φ 的演绎。

语形后承

令 Γ 是一个公式集并且 φ 是一个公式。

- φ 是 Γ（在希尔伯特式证明系统中的）语形后承（syntactic consequence (in Hilbert-style proof system)），记为$\Gamma \vdash \varphi$，如果存在一个从 Γ 到 φ 的演绎。
- φ 是（希尔伯特式证明系统中的）可证式（provable (in Hilbert-style proof system)），如果 $\emptyset \vdash \varphi$。

例子

以下演绎证明了 $\emptyset \vdash (\varphi \to \varphi)$。

$$
\begin{array}{ll}
1.(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) & (\textbf{公理 }1) \\
2.((\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))) & (\textbf{公理 }2) \\
3.((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)) & (1,2\ \mathrm{MP}) \\
4.(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) & (\textbf{公理 }1) \\
5.(\varphi \to \varphi) & (3,4\ \mathrm{MP})
\end{array}
$$

演绎定理（Deduction Theorem）

对于任意公式集 Γ 和公式 φ, ψ，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$。

演绎定理揭示了语形后承关系（元语言概念）和蕴涵公式（对象语言中的公式）之间的联系。

常用的是 “$\Rightarrow$” 方向，它可以增加前提，简化结论，从而帮助我们更容易地证明结论是蕴涵公式的语形后承关系。

证明思路

“$\Leftarrow$” 方向：在一个从 Γ 到 $(\varphi \to \psi)$ 的演绎中加两步，一步引用前提 φ，接着用一次 MP。

“$\Rightarrow$” 方向：用数学归纳法证明，对于任意自然数 n、公式集 Γ 和公式 φ, ψ，如果存在一个长度为 n 的、从 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 到 ψ 的演绎，那么 $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$。

公理独立性

三条公理是不是都是必要的？有没有多余的公理？

直观来说，公理 1 和公理 2 中都没有出现否定符号，所以只用公理 1 和公理 2 通过 MP 规则不能推出公理 3，即公理 3独立（independent)于公理 1、公理 2 和 MP 规则。

要严格证明这一点，我们需要找到一个跟公式有关的性质，使得只用公理 1 和公理 2 通过 MP 规则能够推出来的公式都具有这个性质，但是公理 3 没有这个性质。

否值赋值

一个否定赋值是一个从公式组成的集合到集合 $\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$ 的函数 f，使得以下表格所示的条件成立：

φ	ψ	$f(\neg\varphi)$	$f((\varphi \to \psi))$
F	F	F	T
F	T		T
T	F	F	F
T	T		T

可以证明：

1. 公理 1 和公理 2 在任意否定赋值下的真值都是 T。
2. 对于任意公式 φ 和 ψ，对于任意否定赋值 f，如果 $f(\varphi) = f((\varphi \to \psi)) = \mathrm{T}$，那么 $f(\psi) = \mathrm{T}$。
   进而，每一个只用公理 1 和公理 2 通过 MP 规则得到的公式在任意否定赋值下的真值都是 T。
3. 存在一个否定赋值使得公理 3 的真值是 F。

所以，公理 3 独立于公理 1、公理 2 和 MP 规则。

公理 1 和公理 2 的独立性

使用类似的方法可以证明

- 公理 1 独立于公理 2、公理 3 和 MP 规则。
- 公理 2 独立于公理 1、公理 3 和 MP 规则。

但这两个结论的证明需要引入第三个真值。

两个证明系统的等价

定理

对于任意公式集 Γ 和公式 φ，$\Gamma \vdash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。

证明思路

用数学归纳法证明：

1. 对于任意自然数 n，对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果存在一个长度为 n 的、从 Γ 到 φ 的演绎，那么 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。
2. 对于任意自然数 n，对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果存在一个高度为 n 的推演使得它用到的前提都属于 Γ 并且它的结论是 φ，那么 $\Gamma \vdash \varphi$。

欢迎填写问卷提出宝贵意见！