（经典）命题逻辑理论（上）

形式语言，形式语义和自然演绎系统

钟盛阳

2023 年春季

北京大学哲学系

经典逻辑

- 经典逻辑源于对数学推理的研究。
- 经典逻辑被广泛应用于计算机科学、哲学、语言学等领域。
- 经典逻辑在各领域的应用引起了一些问题，对这些问题的研究推动了逻辑学的发展。

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

语言

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

论证与陈述句

论证一般用于为观点作辩护，而观点一般由陈述句表达。

我们只关心用陈述句来表达的论证。

论证由作为前提的一组陈述句和作为结论的一个陈述句组成。

论证的正确性不是单个陈述句本身的性质，而是陈述句之间的一种关系。

内容与形式

考虑以下五个论证：

- $$\frac{\text{雪是白的，并且草是绿的。}}{\text{雪是白的。}}$$
- $$\frac{\text{北京在长江边上，并且重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$$
- $$\frac{\text{北京在长江边上，并且重庆在四川盆地。}}{\text{重庆在四川盆地。}}$$
- $$\frac{\text{北京在长江边上，或者重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$$
- $$\frac{\text{北京在长江边上，或者重庆在四川盆地。}}{\text{重庆在四川盆地。}}$$

直观来说，前三个论证都是正确的，后两个不正确。

原因不在于陈述句的话题或者真假，而在于像“并且”和“或者”这样的连词。

命题逻辑形式

- $\dfrac{\text{北京在长江边上，并且重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$
- $\dfrac{\text{北京在长江边上，或者重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$
- $\dfrac{\text{如果北京在长江边上，那么重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$

“并且”、“或者”、“如果…那么…”、“并非” 这些连词决定了一个陈述句的命题逻辑形式。

在一个论证中，所涉及的陈述句的命题逻辑形式有可能决定了论证的正确与否。

因内容而正确与因形式而正确

考虑以下两个论证：

- $$\frac{\text{北京在长江边上，并且重庆在四川盆地。}}{\text{北京在长江边上。}}$$
- $$\frac{\text{金岳霖是单身汉}}{\text{金岳霖是未婚的}}$$

第一个论证因形式而正确，第二个论证因内容而正确。

命题逻辑研究的对象是命题逻辑形式及其在论证正确性方面的作用。

连词

连词把陈述句结合成更复杂的陈述句。

我们主要关心以下 4 个连词：

并且、或者、如果…那么…、并非

抽象与记号

这四个连词在不同的语言中由不同的符号表示，在同一个语言中也有其他词语表达相似的意义。

为了固定我们讨论的对象，我们把它们抽象出来，统称为**命题联结词**，分别命名并且引入**命题联结词符号**来表示：

中文连词	命题联结词名称	命题联结词符号
并且	合取	$\wedge$
或者	析取	$\vee$
如果…那么…	蕴涵	$\rightarrow$
并非	否定	$\neg$
当且仅当	等价	$\leftrightarrow$

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

命题逻辑的形式语言

我们抽象出命题联结词这一概念并引入相应的符号，是为了建立命题逻辑的形式语言。

这样做的好处是：

1. 克服自然语言语法不严格规范、有歧义、有模糊性等“缺点”
2. 突出我们想要研究的对象/现象

命题字母

除了命题联结词以外，我们还需要引入符号表示一些非常简单或者我们不想深入分析的陈述句，例如：

- 雪是白的。
- 重庆在四川盆地。
- 所有人都会死。

由于这些陈述句非常简单，我们可以用单个符号表示。

我们用符号 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ 表示这些非常简单或者我们不想深入分析的陈述句，这些符号称为命题字母（propositional letter）。

初始符号

命题逻辑的形式语言的初始符号由以下 3 部分组成:

(我们假设这 3 部分没有公共的元素)

1. **命题字母**: $p_0, p_1, p_2, \ldots$
2. **命题联结词符号**: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
3. **技术符号(括号)**: $($, $)$

公式

直观来说，公式（formula)就是符合“语法”的陈述句。

定义公式的想法：从简单到复杂

每一个命题字母都是（最简单的）公式。

命题联结词符号把公式组合成更加复杂的公式。

（类比：连词把陈述句组合成更加复杂的陈述句）

公式的定义

1. 每一个命题字母都是一个公式；
2. 如果 φ 和 ψ 都是公式，那么 $\neg\varphi$、$(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \to \psi)$ 都是公式；

有穷次使用以上规则得到的符号串是公式。

例子

我们约定：

p: 雪是白的。　q: 草是绿的。　r: 有的乌鸦是白的。

在自然语言中，我们可以用连词把这些陈述句组合成更加复杂的陈述句：

(a) 雪是白的。
(b) 草是绿的。
(c) 有的乌鸦是白的。
(d) 并非有的乌鸦是白的。
(e) 雪是白的，或者草是绿的。
(f) 草是绿的，并且并非有的乌鸦是白的。
(g) 如果雪是白的或者草是绿的，那么草是绿的并且并非有的乌鸦是白的。

相应地我们可以组成一个公式：

(1) p
(2) q
(3) r
(4) $\neg r$
(5) $(p \vee q)$
(6) $(q \wedge (\neg r))$
(7) $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge (\neg r)))$

公式 (7) 展示了陈述句 (g) 的命题逻辑形式。

（公式）结构归纳法：关于公式的公共性质的证明

结构归纳法的想法：从简单到复杂

每一个命题字母都具有某种性质。

在使用命题联结词符号组合公式的时候这种性质得到保持。

那么，所有公式都具有这种性质。

- 要证“对于任意一个公式 φ，φ 具有性质 P”
  证明以下两点：
  1. 每一个命题字母都具有性质 P；
  2. 如果公式 φ 和 ψ 都具有性质 P，那么 $\neg\varphi$、$(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \to \psi)$ 都具有性质 P。

小结与一点历史

自然语言	形式语言
简单陈述句	命题字母 $p_0, p_1, \ldots$
“并非”	$\neg$
“并且”	$\wedge$
“或者”	$\vee$
“如果…那么…”	$\rightarrow$
陈述句	公式

- 论证可以因为内容而正确，也可以因为形式而正确，这是逻辑学创始人亚里士多德的一个重要的洞见。
  （形式和内容的区分并不是绝对的，它依赖于我们的目的。）
- 命题逻辑的研究主要源于古希腊的斯多葛学派（公元前 3 世纪至公元 2 世纪）。

思考

试写出加入了命题联结词符号“$\leftrightarrow$”之后的公式的定义。

语义

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

语句与命题

一般来说，陈述句所表达的内容是命题（proposition），命题有真假。

多个陈述句可以用连词拼成一个复杂的陈述句；同样，多个命题也可以用命题联结词拼成一个复杂的命题。

命题逻辑不研究所有命题的真假。

命题逻辑研究的现象，是多个命题的真假如何决定由它们拼成的复杂命题的真假，并进而影响论证是否因形式而正确。

理论假设

二值原理（Bi-valence Principle）
真值有且只有两个，真和假；分别用符号 T 和 F 表示。

每个命题具有且只具有这两个真值的其中一个。

组合原理（Compositional Principle）
如果一个命题由其他命题组成，那么这个命题的真值由组成它的命题的真值以及这些命题的组合方式唯一确定。

不是所有命题都符合这两个理论假设，但是至少关于数学对象的命题符合这两个理论假设。

另外，在命题逻辑中，我们实际上只关心真值这一种语义性质。

命题联结词

命题联结词的作用是把命题结合成更复杂的命题。

常用的命题联结词有以下 4 个:

否定　　合取　　析取　　蕴涵

命题逻辑主要关心这四个命题联结词的真值条件。

关于否定的真值条件

令字母 P 表示一个陈述句。

- “并非 P”为真，当且仅当 P 为假。
- “并非 P”为假，当且仅当 P 为真。

P	并非 P
F	T
T	F

关于合取的真值条件

令字母 P 和 Q 分别表示两个陈述句。

- “P 并且 Q”为真，当且仅当 P 和 Q 都为真。
- “P 并且 Q”为假，当且仅当 P、Q 之中至少一个为假。

P	Q	P 并且 Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

合取悖论（Conjunction Fallacy）

> *Linda is 31 years old, single, outspoken, and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in anti-nuclear demonstrations.*

Which is more probable?

(a) Linda is a bank teller.
(b) Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.

Tversky **和** Kahneman(1983) **发现，在实验中，选择** (b) **的人比选** (a) **的人多。**

关于析取的真值条件

令字母 P 和 Q 分别表示两个陈述句。

- “P 或者 Q”为真，当且仅当 P、Q 之中至少一个为真。
- “P 或者 Q”为假，当且仅当 P 和 Q 都为假。

P	Q	P 或者 Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

此处定义的析取一般也称为“相容析取（inclusive disjunction）”；加上否定和合取，我们可以定义“不相容析取（exclusive disjunction）”。

条件句

- Implicative conditional:
  If you heat water to 100°C, it boils.
  If it's raining now, then your laundry is getting wet.
- Predictive conditional:
  If it rains this afternoon, everybody will stay home.
- Indicative conditional:
  If it is raining in New York, then Mary is at home.
- Counterfactual:
  If it was raining in New York, then Mary would be at home.

直观上，在陈述句“如果 P **那么** Q”**中，前件（**antecedent)P **和后件**(consequent)Q **需要有一些联系**:

- **因果联系或者逻辑联系**
- **内容相关**
- **真值方面的相关性**

关于“如果……那么……”的真值条件

令字母 P 和 Q 分别表示两个陈述句。

- “如果 P，那么 Q”为真，当且仅当 P 为假或者 Q 为真。
- “如果 P，那么 Q”为假，当且仅当 P 为真并且 Q 为假。

P	Q	如果 P，那么 Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

这种对“如果……那么……”的理解一般称为“实质蕴涵（material implication）”。

在此课程中，有时候将“如果……那么……”简写为“$\Rightarrow$”。

说明

“对于任意自然数 x，如果 $x > 7$，那么 $x > 3$”为真。

所以，对于任一特定的 x，“如果 $x > 7$，那么 $x > 3$”为真。

例如：

- **情况一**： x 是 9。
  “如果 $9 > 7$，那么 $9 > 3$”为真。
  “$9 > 7$”为真。
  “$9 > 3$”为真。
- **情况二**： x 是 5。
  “如果 $5 > 7$，那么 $5 > 3$”为真。
  “$5 > 7$”为假。
  “$5 > 3$”为真。
- **情况三**： x 是 1。
  “如果 $1 > 7$，那么 $1 > 3$”为真。
  “$1 > 7$”为假。
  “$1 > 3$”为假。

沃森选择实验（Wason’s Selection Task）

以下是四张卡片；每张卡片的一面是字母，另一面是数字。

$\boxed{E}$ $\boxed{\mathrm{C}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{3}$

请问，为了判断以下陈述的真假，至少需要翻开检查哪几张卡片？

如果一张卡片的一面是元音字母，那么它的另一面是偶数。

Wason(1966)：选 E 有 50%，选 E 和 6 有 20%，选 C 和 3 有 15%，选 3 有 5%，选 C 有 5%。

Griggs 和 Cox(1982) 把沃森的抽象内容转变成现实生活中的具体内容，正确率大大提高。

实质蕴涵怪论

令字母 P 和 Q 分别表示两个陈述句。

- 考虑已知 P 为假的情况。
  根据真值表，“如果 P，那么 Q”为真，通常称为空洞为真 (vacuously true)。
- 考虑已知 Q 为真的情况。
  根据真值表，“如果 P，那么 Q”为真。

以上两种情况一般合称为“实质蕴涵怪论”。

现代模态逻辑的产生源自于 C.I. Lewis 解决实质蕴涵怪论的尝试。

注意

“**如果** P，**那么** Q”**和**“**如果** Q，**那么** R”**都为真的情况下**“**如果** P，**那么** R”**也为真**：

P	*Q*	*R*	**如果** P，**那么** Q	**如果** Q，**那么** R	**如果** P，**那么** R
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

在日常生活中，“**如果**……**那么**……”**的意义不仅仅在于真值**。
Otto is Waldo’s successful rival for Anna’s affections. Waldo still tags around after Anna, but never runs the risk of meeting Otto.

If Otto had gone to the party, then Anna would have gone.
If Anna had gone, then Waldo would have gone.
Therefore, if Otto had gone, then Waldo would have gone.

– – **来自** D. Lewis, *Counterfactuals* (1973)

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

命题逻辑中的模型

在命题逻辑中，根据二值原理，每一个命题都有且只有两个真值中的一个；所以，作为世界的抽象，模型只需要对每一个公式赋予两个真值中的一个。

另外，根据四个命题联结词的直观，公式的真值之间需要符合由真值表所规定的联系。

这样的一个模型称为赋值。

赋值

赋值的定义

一个赋值（valuation）是一个函数 $V : Form \to \{T, F\}$，使得以下表格所示的条件都成立：

$V(\varphi)$	$V(\neg\varphi)$
T	F
F	T

$V(\varphi)$	$V(\psi)$	$V((\varphi \wedge \psi))$	$V((\varphi \vee \psi))$	$V((\varphi \to \psi))$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

例子

令 V 是一个赋值，使得 $V(p) = \mathrm{T}$，$V(q) = \mathrm{F}$，$V(r) = \mathrm{T}$。

$V(\neg p)$	$V((q \to r))$	$V((\neg p \wedge (q \to r)))$	$V((r \vee (\neg p \wedge (q \to r))))$
F	T	F	T

$V(\neg q)$	$V((r \vee \neg q))$	$V(((r \vee \neg q) \to r))$	$V((((r \vee \neg q) \to r) \wedge p))$
T	T	T	T

赋值的两个特点

令 V 为任意赋值。

1. 命题字母在 V 之下的函数值，即 $V(p_0), V(p_1), \ldots$，唯一决定了（整个函数）V。
2. 对于任意公式 φ，$V(\varphi)$ 由出现在它里面的命题字母在 V 之下的函数值决定，与不出现在它里面的命题字母在 V 之下的函数值无关。

真、语义后承、重言式、逻辑等价

令 Γ 是公式组成的集合且 φ 和 ψ 都是公式。V 是一个赋值。

1. φ 在 V 上为**真**（true），或 V**满足**（satisfy）φ，如果 $V(\varphi) = \mathrm{T}$。
2. V**满足**Γ，如果 $V(\varphi) = \mathrm{T}$ 对每一个 $\varphi \in \Gamma$ 都成立。
3. φ 是 Γ 的一个**语义后承**（semantic consequence），记为$\Gamma \models \varphi$，如果，对于任意赋值 V，若 V 满足 Γ，则 V 满足 φ。
4. φ 是一个**重言式**（tautology），如果 $\emptyset \models \varphi$，即 $V(\varphi) = \mathrm{T}$ 对任意一个赋值 V 成立。
5. φ 与 ψ**逻辑等价**（logical equivalent），记为$\varphi \equiv \psi$，如果 $\{\varphi\} \models \psi$ 并且 $\{\psi\} \models \varphi$。

重言式的例子

ψ	χ	$(\chi \to \psi)$	$(\psi \to (\chi \to \psi))$
F	F	T	T
F	T	F	T
T	F	T	T
T	T	T	T

ψ	χ	θ	$(\psi \to (\chi \to \theta))$	$(\psi \to \chi)$	$(\psi \to \theta)$	$((\psi \to (\chi \to \theta)) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \theta)))$
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T	T

ψ	χ	$(\neg\chi \to \neg\psi)$	$(\psi \to \chi)$	$((\neg\chi \to \neg\psi) \to (\psi \to \chi))$
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

重要的逻辑等价关系

- 幂等律
  $(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$，$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$
- 交换律
  $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$，$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$
- 结合律
  $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$，$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$
- 吸收律
  $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$，$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi$
- 分配律
  $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$，
  $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$
- 互补律
  $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ 和 $(\varphi \vee \neg\varphi)$ 都是重言式
- 双重否定律
  $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- 德・摩根律
  $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$，$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

真值函数完全性

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$\neg(\varphi \to \neg\psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\neg\varphi \to \psi)$
F	F	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
T	T	T	T	T	T

一般地，每一个公式都逻辑等价于一个只含有命题联结词 $\neg$ 和 $\to$ 的公式。

小结与一点历史

直观	形式化
世界	赋值
连词的语义	命题联结词真值表
（因为命题形式而）在所有的世界上都为真的陈述句	重言式
（因为命题形式而）保真的推理	语义后承

- 英国逻辑学家布尔首先注意到命题逻辑中的逻辑等价关系与数的运算律之间的相似性，并加以系统研究。

思考

试给出命题联结词“等价”的真值表。

试写出加入了命题联结词符号“$\leftrightarrow$”之后的赋值的定义。

紧致性定理（Compactness Theorem）

对于任意公式集 Γ，以下是等价的：

(i) 存在一个赋值满足 Γ;
(ii) 对于 Γ 的每一个有穷子集，都存在一个赋值满足它。

证明

从 (i) 推 (ii) 是简单的，难的是从 (ii) 推 (i)：

我们把赋值想象成钥匙，Γ 的有穷子集想象成锁。我们已知每一把锁都有一把钥匙能开，现在要找一把钥匙打开所有的锁。

根据赋值的特点，我们只需要给出命题字母的真值。

以下逐一定义 $V(p_0), V(p_1), \ldots$。

紧致性定理（二）

$V(p_0)$ 考虑由所有赋值组成的集合，记为 $\mathcal{V}_0$。
"p_0 为真"和"p_0 为假"将 $\mathcal{V}_0$ 分成不相交的两部分。
注意到，在这两部分中，至少有一部分具有以下性质：

($\star_0$) 对于 Γ 的每一个有穷子集，在这部分中有一个赋值满足它。

为了推出矛盾，假设两部分都没有这个性质。
此时，存在 Γ 的一个有穷子集 Δ 使得满足它的赋值都令 p_0 为真，
又存在 Γ 的一个有穷子集 Σ 使得满足它的赋值都令 p_0 为假。
$\Delta \cup \Sigma$ 是 Γ 的有穷子集，但没有赋值满足它，与 Γ 有穷可满足矛盾。

如果"p_0 为真"的部分满足 ($\star_0$)，我们令 $V(p_0) = \mathrm{T}$；否则令 $V(p_0) = \mathrm{F}$。
无论如何，对于 Γ 的每一个有穷子集，总存在一个赋值满足它并且 p_0 的真值为 $V(p_0)$。

紧致性定理（三）

$V(p_1)$ 此时我们已经定义了 $V(p_0)$ 使得，对于 Γ 的每一个有穷子集，总存在一个赋值满足它并且 p_0 的真值为 $V(p_0)$。
考虑由所有满足 p_0 的真值为 $V(p_0)$ 的赋值组成的集合，记为 $\mathcal{V}_1$。
“p_1 为真”和“p_1 为假”将 $\mathcal{V}_1$ 分成不相交的两部分。
注意到，在这两部分中，至少有一部分具有以下性质：

($\star_1$) 对于 Γ 的每一个有穷子集，在这部分中有一个赋值满足它。

为了推出矛盾，假设两部分都没有这个性质。
此时，存在 Γ 的一个有穷子集 Δ 使得 $\mathcal{V}_1$ 中满足它的赋值都令 p_1 为真，又存在 Γ 的一个有穷子集 Σ 使得 $\mathcal{V}_1$ 中满足它的赋值都令 p_1 为假。
$\Delta \cup \Sigma$ 是 Γ 的有穷子集，但没有 $\mathcal{V}_1$ 中的赋值满足它，与我们定义 $V(p_0)$ 的方法矛盾。

如果“p_1 为真”的部分满足 ($\star_1$)，我们令 $V(p_1) = \mathrm{T}$；否则令 $V(p_1) = \mathrm{F}$。
无论如何，对于 Γ 的每一个有穷子集，总存在一个赋值满足它并且 p_0, p_1 的真值分别为 $V(p_0), V(p_1)$。

$\cdots$ $\cdots$

紧致性定理（四）

$V(p_n)$ 此时我们已经定义了 $V(p_0), \dots, V(p_{n-1})$ 使得，对于 Γ 的每一个有穷子集，总存在一个赋值满足它并且 $p_0, \dots, p_{n-1}$ 的真值分别为 $V(p_0), \dots, V(p_{n-1})$。

考虑由所有满足 $p_0, \dots, p_{n-1}$ 的真值分别为 $V(p_0), \dots, V(p_{n-1})$ 的赋值组成的集合，记为 $\mathcal{V}_n$。

"p_n 为真"和"p_n 为假"将 $\mathcal{V}_n$ 分成不相交的两部分。

注意到，在这两部分中，至少有一部分具有以下性质：

$(\star_n)$ 对于 Γ 的每一个有穷子集，在这部分中有一个赋值满足它。

为了推出矛盾，假设两部分都没有这个性质。

此时，存在 Γ 的一个有穷子集 Δ 使得 $\mathcal{V}_n$ 中满足它的赋值都令 p_n 为真，又存在 Γ 的一个有穷子集 Σ 使得 $\mathcal{V}_n$ 中满足它的赋值都令 p_n 为假。

$\Delta \cup \Sigma$ 是 Γ 的有穷子集，但没有 $\mathcal{V}_n$ 中的赋值满足它，与我们定义 $V(p_0), \dots, V(p_{n-1})$ 的方法矛盾。

如果"p_n 为真"的部分满足 $(\star_n)$，我们令 $V(p_n) = \mathrm{T}$；否则令 $V(p_n) = \mathrm{F}$。

无论如何，对于 Γ 的每一个有穷子集，总存在一个赋值满足它并且 $p_0, \dots, p_n$ 的真值分别为 $V(p_0), \dots, V(p_n)$。

$\dots$ $\dots$

紧致性定理（五）

最后，证明 V 满足 Γ。

任取 Γ 中的公式 φ。

假设在 φ 中出现的命题字母不超出 $p_0, \ldots, p_n$。

因为 $\{\varphi\}$ 是 Γ 的有穷子集，根据 V 的定义，存在赋值满足 $\{\varphi\}$ 并且 $p_0, \ldots, p_n$ 的真值分别为 $V(p_0), \ldots, V(p_n)$。

因为 $V(\varphi)$ 只取决于 $V(p_0), \ldots, V(p_n)$，所以 V 也满足 φ。

语形——命题逻辑自然演绎系统

语言

内容与形式

命题逻辑的形式语言

语义

真与假

命题逻辑的形式语义

语形——命题逻辑自然演绎系统

证明与演绎

在这部分，我们介绍命题逻辑的一个形式系统，称为**命题逻辑自然演绎系统（Natrual Deduction System of Propositional Logic）**

我们在直观与形式化之间穿插，建立以下对应关系：

直观	形式化
证明（正确的数学论证）	推演
连词的证明策略	命题联结词的引入规则
连词的使用策略	命题联结词的消去规则
前提和结论之间（基于命题形式）的可推导关系	语形后承

推演

自然演绎系统的核心概念是推演（derivation）。

我们定义推演的思路是给出一系列规则，这些规则告诉我们，什么是最简单的推演，以及如何用已有的推演拼成更大更复杂的推演。

这些规则同时定义了关于推演的三个重要概念：用到的前提（undischarged assumption）、结论（conclusion）和高度（height）。

特别地，一个推演可以有多个用到的前提，但有且只有一个结论。

我们用记号 $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}$ 表示一个结论为 φ 的推演，用 $h(D)$ 表示 D 的高度。

证明的开始

证明可以从陈述已知条件开始。

如果 P 是一个陈述句，则以下是一个证明：

$$\text{已知 } P$$

这个证明可以被理解为：

$$\frac{\text{因为 } P}{\text{所以 } P}$$

规则 (A)

规则（A）
如果 φ 是一个公式，那么
$$\varphi$$
是一个推演。 它的用到的前提是 φ。 它的结论是 φ。 它的高度是 0。

关于“并且”的证明策略

- 要证“P 并且 Q”:
  给出一个关于 P 的证明和一个关于 Q 的证明。

合取引入规则（∧I）

规则（∧I）
如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $$\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \psi \end{array}$$ 都是推演，那么以下是一个推演： $$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \psi \end{array}}{(\varphi \wedge \psi)} \,(\wedge \mathrm{I})$$ 它用到的前提是 D_1 用到的前提以及 D_2 用到的前提。 它的结论是 $(\varphi \wedge \psi)$。 它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\} + 1$。

关于“并且”的使用策略

- 已推知“P 并且 Q”:
  P 和 Q 分别是可使用的条件。

合取消去规则（∧E）

规则（∧E）
如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且
$$\begin{array}{c} D \\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}$$
是推演，那么以下都是推演：
$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}}{\varphi}\ (\wedge\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}}{\psi}\ (\wedge\mathrm{E})$$
它们用到的前提是 D 用到的前提。 它们的结论分别是 φ 和 ψ。 它们的高度都是 $h(D) + 1$。

例子

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \land \psi)}{\psi}\,(\land\mathrm{E}) \qquad \dfrac{(\varphi \land \psi)}{\varphi}\,(\land\mathrm{E})}{(\psi \land \varphi)}\,(\land\mathrm{I})$$

关于“或者”的证明策略

- 要证“P 或者 Q”:
  给出一个关于 P 的证明或者给出一个关于 Q 的证明。

析取引入规则（∨I）

规则（∨I）
如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}$ 是推演，那么以下是推演：$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}}{(\varphi \vee \psi)}\,(\vee I)$ 它用到的前提是 D 用到的前提。它的结论分别是 φ。它的高度是 $h(D) + 1$。又如果 $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}$ 是推演，那么以下是推演：$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{(\varphi \vee \psi)}\,(\vee I)$ 它用到的前提是 D 用到的前提。它的结论分别是 ψ。它的高度是 $h(D) + 1$。

关于“如果…那么…”的使用策略

- 已推知“如果 P，那么 Q”：
  想办法证明 P，然后由此已知条件得到 Q。

蕴涵消去规则（$\to$E）

规则（$\to$E）

如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ (\varphi \to \psi) \end{array}$$

都是推演，那么以下是一个推演：

$$\cfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ (\varphi \to \psi) \end{array}}{\psi}\ (\to\mathrm{I})$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提以及 D_2 用到的前提。
它的结论是 ψ。
它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\} + 1$。

例子

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad (\varphi \to \psi)}{\psi}\,(\to\mathsf{E}) \qquad (\psi \to \chi)}{\chi}\,(\to\mathsf{E})$$

假设

在证明中，我们经常会通过假设的方式使用一些不是已知条件的陈述句。

比较以下两个论证：

已知亚里士多德有闲暇。已知亚里士多德有好奇心。所以亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心。已知如果亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心，那么亚里士多德是哲学家。所以亚里士多德是哲学家。

假设亚里士多德有闲暇。已知亚里士多德有好奇心。所以亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心。已知如果亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心，那么亚里士多德是哲学家。所以亚里士多德是哲学家。所以，如果亚里士多德有闲暇，那么亚里士多德是哲学家。

关于假设的记号

在推演中，我们用方括号标示假设。

令 $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ 表示一个推演。

用 $\begin{array}{c} [\varphi] \\ D \\ \psi \end{array}$ 表示在 $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ 中将所有由规则 (A) 引入的 φ 换成 $[\varphi]$ 的结果。

注意：$\begin{array}{c} [\varphi] \\ D \\ \psi \end{array}$ 不一定是一个推演。

关于“如果…那么…”的证明策略

- 要证“如果 P，那么 Q”：
  假设 P 是一个已知条件，给出一个关于 Q 的证明。

规则 (→I)

规则 (→I)

如果

$$\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$$

是一个推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ D \\ \psi\end{array}}{(\varphi \to \psi)}\,(\to\mathrm{I})$$

它用到的前提是，除去 φ 以外，D 用到的前提。
它的结论是 $(\varphi \to \psi)$。
它的高度是 $\max\{h(D)\} + 1$。

例子 1

$$\dfrac{[\varphi]^1}{(\varphi \to \varphi)}\,(\to\mathrm{I}),1$$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\,(\wedge\mathrm{I})}{(\varphi \to (\varphi \wedge \psi))}\,(\to\mathrm{I}),1$$

例子 2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad [(\varphi \to \psi)]^2}{\psi}\,(\to\mathrm{E}) \qquad \dfrac{[\varphi]^1 \qquad [(\varphi \to (\psi \to \chi))]^3}{(\psi \to \chi)}\,(\to\mathrm{E})}{\dfrac{\chi}{\dfrac{(\varphi \to \chi)}{((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))}\,(\to\mathrm{I}),2}\,(\to\mathrm{I}),1}\,(\to\mathrm{E})}{((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))}\,(\to\mathrm{I}),3
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad (\varphi \to \psi)}{\psi}\,(\to\mathrm{E}) \qquad (\psi \to \chi)}{\chi}\,(\to\mathrm{E})}{(\varphi \to \chi)}\,(\to\mathrm{I})
$$

特殊情况：没用的假设

以下论证直观上是正确的：

假设亚里士多德很有钱。已知亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心。已知如果亚里士多德有闲暇并且亚里士多德有好奇心，那么亚里士多德是哲学家。所以亚里士多德是哲学家。所以，如果亚里士多德很有钱，那么亚里士多德是哲学家。

以下是一个推演：

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad (p \to q)}{q}\,(\to\mathrm{E})}{(r \to q)}\,(\to\mathrm{I})$$

其中规则 $(\to\mathrm{I})$ 要求打方括号的公式 r 并没有通过规则 (A) 引入。

关于“并非”的证明策略

- 要证“并非 P”：
  给出一个陈述句 Q；
  假设 P 是一个已知条件，给出一个关于 Q 的证明和一个关于“并非 Q”的证明。

规则 (¬I)

规则（¬I）

如果

$$\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \qquad \text{和} \qquad \begin{array}{c} D' \\ \neg\varphi \end{array}$$

都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c} [\psi] \\ D \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi] \\ D' \\ \neg\varphi \end{array}}{\neg\psi}\,(\neg\mathrm{I})$$

它用到的前提是，除去 ψ 以外，D 用到的前提以及 D' 用到的前提。
它的结论是 $\neg\psi$。
它的高度是 $\max\{h(D), h(D')\} + 1$。

反证法

- 要证“P”：
  给出一个陈述句 Q；
  假设“并非 P”是一个已知条件，给出一个关于 Q 的证明和一个关于“并非 Q”的证明。

  （直觉主义不接受这一证明方法。）

规则 (RAA)

规则（RAA）
如果 $$\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{c} D' \\ \neg\varphi \end{array}$$ 都是推演，那么以下是一个推演： $$\dfrac{\begin{array}{c} [\neg\psi] \\ D \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\neg\psi] \\ D' \\ \neg\varphi \end{array}}{\psi}\ (\text{RAA})$$ 它用到的前提是，除去 $\neg\psi$ 以外，D 用到的前提以及 D' 用到的前提。 它的结论是 ψ。 它的高度是 $\max\{h(D), h(D')\} + 1$。

（直觉主义逻辑没有这一条规则。）

逆否证法及其理由

- 要证"如果 P 那么 Q"：
  假设"并非 Q"是一个已知条件，给出一个关于"并非 P"的证明。

$$
\dfrac{[\varphi]^2 \qquad \dfrac{[\neg\psi]^1 \qquad (\neg\psi \to \neg\varphi)}{\neg\varphi}\,(\to\mathrm{E})}{\dfrac{\psi}{(\varphi \to \psi)}\,(\to\mathrm{I}),2}\,(RAA),1
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad (\varphi \to \psi)}{\psi}\,(\to\mathrm{E}) \qquad [\neg\psi]^2}{\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{I}),1}{(\neg\psi \to \neg\varphi)}\,(\to\mathrm{I}),2
$$

关于“或者”的使用规则

- 已推知“P 或者 Q”:
  分类讨论:
  记想要证明的结论为 R。
  首先假设 P，给出一个关于 R 的证明；其次假设 Q，给出一个关于 R 的证明。
  即分别以 P 和 Q 为假设证明 R。

规则（∨E）

规则（∨E）

如果 φ 和 ψ 都是公式，并且

$$\begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ (\varphi \vee \psi) & \chi & \chi \end{array}$$

都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ (\varphi \vee \psi) \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ D_2 \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ D_3 \\ \chi \end{array}}{\chi}\,(\vee\mathrm{E})$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提，除去 φ 以外 D_2 用到的前提以及除去 ψ 以外 D_3 用到的前提。
它的结论是 χ。
它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2), h(D_3)\} + 1$。

半费之讼

古希腊哲学家普罗泰哥拉教授论辩术。对于每一位学生，在开始学习之前，他们都会签订一份合同。合同规定，学生在学习前先交一半学费，学成后第一次打赢官司再交剩下的一半学费。

有个学生叫埃瓦特，学成以后，未做律师，也没交学费。

普罗泰哥拉起诉他，并对他说："如果你胜诉了，你就应按照合同交学费；如果你败诉了，就必须按照法院判决交学费。所以，不管胜诉还是败诉，你都要交学费。"

埃瓦特回答道："如果我胜诉了，根据法庭判决，我不用交学费；如果我败诉了，那么根据合同，我也不用交学费！"

半费之讼的形式化

令

- p: 普罗泰哥拉赢了该场官司。
- q: 埃瓦特交学费

普罗泰哥拉的论证：

$$\dfrac{(p \vee \neg p) \qquad \dfrac{[p]^1 \qquad (p \to q)}{q}\,(\to E) \qquad \dfrac{[\neg p]^1 \qquad (\neg p \to q)}{q}\,(\to E)}{q}\,(\vee E),1$$

埃瓦特的论证：

$$\dfrac{(p \vee \neg p) \qquad \dfrac{[p]^1 \qquad (p \to \neg q)}{q}\,(\to E) \qquad \dfrac{[\neg p]^1 \qquad (\neg p \to \neg q)}{q}\,(\to E)}{\neg q}\,(\vee E),1$$

“或者”与“如果……那么……”

- 要证“P 或者 Q”：
  假设“非 P”是一个已知条件，给出一个关于 Q 的证明。

语形后承

令 Γ 是一个公式集且 φ 是一个公式。

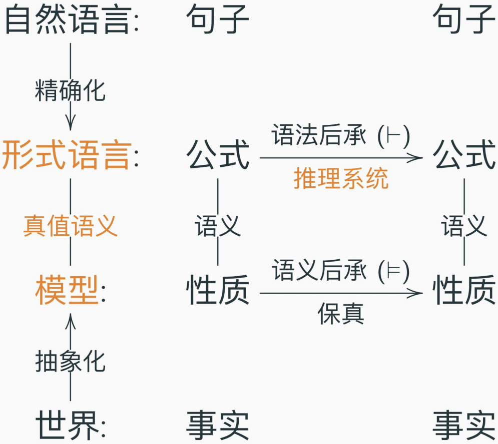
- φ 是 Γ（在自然演绎系统中的）语形后承（syntactic consequence (in natural deduction)），记为$\Gamma \vdash^{ND} \varphi$，如果存在一个推演使得它用到的前提都属于 Γ 并且它的结论是 φ。
- φ 是（自然演绎系统中的）可证的（provable (in natural deduction)），如果 $\emptyset \vdash^{ND} \varphi$。
- Γ 是（在自然演绎系统下）一致的（consistent），如果不存在一个公式 ψ 使得 $\Gamma \vdash^{ND} \psi$ 并且 $\Gamma \vdash^{ND} \neg\psi$。

思考

试写出关于命题联结词“等价”和相应的符号“$\leftrightarrow$”的引入规则和消去规则。

图景

回顾王老师讲过的图景：



欢迎填写问卷提出宝贵意见！