邻域语义学简介

刘力恺

2020 年 5 月 19 日

目录

为什么需要邻域语义学

定义 (重要的公理和推理规则)

单调公理模式 M：$\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$
结合公理模式 C：$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$
必然公理 N：$\Box\top$
克里普克公理模式 K：$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
模态等值替换规则 RE：$\varphi \leftrightarrow \psi / \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$
单调规则 RM：$\varphi \to \psi / \Box\varphi \to \Box\psi$
正则规则 RR：$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \psi / \Box\varphi_1 \wedge \Box\varphi_2 \to \Box\psi$
正规规则 RK：$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi / \Box\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\varphi_n \to \Box\psi \ (n \geqslant 0)$
必然化规则 RN：$\varphi / \Box\varphi$

为什么需要邻域语义学

定义 (重要的模态系统)

极小模态系统 $\mathbf{E} := < \mathbf{PC}, \mathrm{RE} >$
极小单调模态系统 $\mathbf{M} := < \mathbf{E}, \mathrm{M} >$
极小正则模态系统 $\mathbf{R} := < \mathbf{M}, \mathrm{C} >$
极小正规模态系统 $\mathbf{K} := < \mathbf{PC}, \mathrm{K}, \mathrm{RN} >$
※ 这里我们的初始模态词是 $\Box$，若是 $\Diamond$，则需添加对偶公理 dual：$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

定理

$\mathbf{M} = < \mathbf{PC}, \mathrm{RM} >$
$\mathbf{R} = < \mathbf{PC}, \mathrm{RR} > = < \mathbf{PC}, \mathrm{K}, \mathrm{RM} >$
$\mathbf{K} = < \mathbf{PC}, \mathrm{RK} > = < \mathbf{R}, \mathrm{N} >$

证明从略.

为什么需要邻域语义学

从直观上看显然有 $\mathbf{E} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{K}$，事实上也是这样的. 根据这一事实可知，$\mathbf{E}, \mathbf{M}, \mathbf{R}$ 相对于任何一个克里普克框架类都是不完全的.

但显然在关系语义下我们无法证明这一事实. 也就是说标准的关系语义无法刻画 $\mathbf{K}$ 的真子系统. 更一般的标准关系语义无法刻画非正规逻辑，因为必然化规则在该语义下永远有效.

如果将可能世界集划分为正规世界集和非正规世界集，使得形如 $\Box\varphi$ 的公式在非正规世界上必假，那么如此改造后的关系语义可以刻画正则模态逻辑. 然而对于更小的逻辑，这种方法也是无能为力的.

因此我们需要一套新的语义学来刻画这些非正规逻辑. 邻域语义学和代数语义学均是可选的方案.

定义 (公式在克里普克模型中的外延)

设 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 是克里普克模型，递归定义模态公式 φ 在 $\mathfrak{M}$ 中的外延 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{M}}$ 如下：

$[\![\top]\!]^{\mathfrak{M}} = W$;

$[\![p]\!]^{\mathfrak{M}} = \{w \in W \mid w \in V(p)\}$;

$[\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{M}} = W \setminus [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}}$;

$[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathfrak{M}} = [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{M}} \cap [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{M}}$;

$[\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}} = l_R[\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}} = \{w \in W \mid \forall v \in W : Rwv \Rightarrow v \in [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}}\}$.

容易发现

$$w \in [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow R(w) \subseteq [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}}$$

构造映射

$$N : W \to \wp(\wp(W)),\ w \mapsto \{X \in \wp(W) \mid R(w) \subseteq X\}$$

则有

$$w \in [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \in N(w)$$

定义 (邻域模型和邻域框架)

称 $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ 为邻域模型，如果 $W \neq \varnothing$，$N : W \to \wp(\wp(W))$，$V : W \to \wp(\mathbb{P})$. 称 $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$ 为邻域框架.

定义 (公式在邻域模型中的外延)

设 $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ 是邻域模型，递归定义模态公式 φ 在 $\mathfrak{M}$ 中的外延 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{M}}$ 如下：

$[\![\top]\!]^{\mathfrak{M}} = W$; $\quad [\![p]\!]^{\mathfrak{M}} = \{w \in W \mid w \in V(p)\}$;

$[\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{M}} = W \setminus [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}}$; $\quad [\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathfrak{M}} = [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{M}} \cap [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{M}}$;

$[\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}} = \{w \in W \mid [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \in N(w)\}$.

据 $\Diamond\psi := \neg\Box\neg\psi$ 有

$$
\begin{aligned}
[\![\Diamond\psi]\!]^{\mathfrak{M}} &= W \setminus \{w \in W \mid W \setminus [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \in N(w)\} \\
&= \{w \in W \mid W \setminus [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}} \notin N(w)\}
\end{aligned}
$$

定义 (有效性)

设 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle = \langle W, N, V \rangle$ 是邻域模型，φ 是模态公式，$w \in W$.

$\star$ 称 φ 在点模型 $\langle \mathfrak{M}, w \rangle$ 上有效，记作 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$，如果 $w \in [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{M}}$.

$\star$ 称 φ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上有效，记作 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，如果 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{M}} = W$.

$\star$ 称 φ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效，记作 $\mathfrak{F} \vDash \varphi$，如果对 $\mathfrak{F}$ 上的任意赋值 V 和可能世界 w，都有 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \varphi$.

定义 (语义后承)

称公式 φ 是公式集 Γ 相对于框架类 $\mathscr{F}$ 的语义后承，记作 $\Gamma \vDash_{\mathscr{F}} \varphi$，如果对任意 $\mathfrak{F} \in \mathscr{F}$，及其上的任意赋值 V 和可能世界 w，若对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \gamma$，则 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \varphi$.

当 $\Gamma = \varnothing$ 时，记作 $\vDash_{\mathscr{F}} \varphi$，此时称 φ 在框架类 $\mathscr{F}$ 上有效.

记 $\mathscr{E}$ 为所有邻域框架组成的类.
显然命题逻辑的公理在 $\mathscr{E}$ 上有效，分离规则 MP 在 $\mathscr{E}$ 上保持有效性.

引理

规则 RE 在 $\mathscr{E}$ 上保持有效性.

证明：设 $\vDash_{\mathscr{E}} \varphi \leftrightarrow \psi$. 任给一个框架 $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$，及其上的赋值 V. 则对任意 $w \in W$，$\mathfrak{F}, V, w \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$，即 $w \in [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}$ 当且仅当 $w \in [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$，由 w 的任意性，$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$. 从而对任意 $w \in W$，$w \in [\![\Box\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}$ 当且仅当 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$ 当且仅当 $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$ 当且仅当 $w \in [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$. 所以 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$，再由 $\mathfrak{F}, V, w$ 的任意性，$\vDash_{\mathscr{E}} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$.

引理

公理 $\mathrm{M}, \mathrm{C}, \mathrm{N}$ 在 $\mathscr{E}$ 上不有效.

证明：(1) 构造模型 $\mathfrak{M} = \langle W, N, V\rangle$，其中 $W = \{u, v\}$，
$N(u) = \{\varnothing\}$， $V(p) = \{u\}$， $V(q) = \{v\}$. 则
$[\![p \wedge q]\!]^{\mathfrak{M}} = V(p) \cap V(q) = \varnothing \in N(u)$，从而 $u \in [\![\Box(p \wedge q)]\!]^{\mathfrak{M}}$，即
$\mathfrak{M}, u \vDash \Box(p \wedge q)$. 但 $[\![p]\!]^{\mathfrak{M}}, [\![q]\!]^{\mathfrak{M}} \notin N(u)$，从而 $u \notin [\![\Box p]\!]^{\mathfrak{M}}$ 且
$u \notin [\![\Box q]\!]^{\mathfrak{M}}$，进而 $u \notin [\![\Box p \wedge \Box q]\!]^{\mathfrak{M}}$，即 $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box p \wedge \Box q$.
(2) 构造模型 $\mathfrak{M} = \langle W, N, V\rangle$，其中 $W = \{u, v\}$，
$N(u) = \{\{u\}, \{v\}\}$， $V(p) = \{u\}$， $V(q) = \{v\}$. 则
$[\![p]\!]^{\mathfrak{M}}, [\![q]\!]^{\mathfrak{M}} \in N(u)$，从而 $u \in [\![\Box p]\!]^{\mathfrak{M}}$ 且 $u \in [\![\Box q]\!]^{\mathfrak{M}}$，进而
$u \in [\![\Box p \wedge \Box q]\!]^{\mathfrak{M}}$，即 $\mathfrak{M}, u \vDash \Box p \wedge \Box q$. 但
$[\![p \wedge q]\!]^{\mathfrak{M}} = V(p) \cap V(q) = \varnothing \notin N(u)$，从而 $u \notin [\![\Box(p \wedge q)]\!]^{\mathfrak{M}}$，即
$\mathfrak{M}, u \nvDash \Box(p \wedge q)$.
(3) 构造模型 $\mathfrak{M} = \langle W, N, V\rangle$，其中 $W = \{w\}$， $N(w) = \{\varnothing\}$. 则
$[\![\top]\!]^{\mathfrak{M}} = W \notin N(w)$，所以 $w \notin [\![\Box\top]\!]^{\mathfrak{M}}$，即 $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box\top$.

什么是邻域语义学

为什么叫邻域语义学？

定义 (拓扑学中的邻域)

给定集合 X，称映射 $U: X \to \wp(\wp(X))$ 为邻域映射，如果对任意 $x \in X$，$U(x)$ 满足：
(1) 若 $A \in U(x)$，则 $x \in A$；
(2) 若 $A, B \in U(x)$，则 $A \cap B \in U(x)$；
(3) 若 $A \in U(x)$，且 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in U(x)$；
(4) 若 $A \in U(x)$，则存在若 $B \in U(x)$，使得 $B \subseteq A$，且对任意 $y \in B$ 有 $B \in U(y)$.（这样的 B 称为开集）
此时称 $U(x)$ 中的元素为 x 的邻域.

特例（实数集 $\mathbb{R}$ 上的邻域映射）：任意 $x \in \mathbb{R}$，$U(x) = \{(x - \delta_1, x + \delta_2) \mid \delta_1, \delta_2 > 0\}$ 中的元素称为 x 的邻域.

定义 (拓扑学中的邻域)

设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 上的拓扑，$\mathcal{T}$ 中的元素称为开集. 对任意 $x \in X$，称 $A \subseteq X$ 是 x 的邻域，如果存在开集 $O \in \mathcal{T}$，使得 $x \in O \subseteq A$.

什么是邻域语义学

邻域语义学的历史：

(1) McKinsey & Taski 在 *The Algebra of Topology* (1944) 一文中暗示了邻域语义学的思想.

(2) Montague 的 *Universal Grammer* (1970) 和 Scott 的 *Advice on Modal Logic* (1970) 的发表标志着邻域语义学正式创立.

(3) Gerson 的 *A Comparative Study of Modal Propositional Semantics* (1974)、*The Inadequacy of the Neighborhood Semantics* (1975)、*An Extension of S4 Complete for the Neighborhood Semantics but Incomplete for the Relational Semantics* (1975a)、*A Neighborhood Frame for T with no Equivalent Relational Frame* (1976) 得出了许多关于关系语义和邻域语义比较、完全性和不完全性的重要结果.

(4) Segerberg 的 *An Essay in Classical Modal Logic*(1971)、Chellas 的 *Modal Logic： An Introduction*(1980)、Pacuit 的 *Neighborhood Semantics for Modal Logic*(2017) 较好总结了当时已有的重要结果，并给出了一些新结果.

定理 (E 的完全性)

若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{E}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{E}} \varphi$.

定义 (典范模型)

称 $\mathfrak{M}^{\mathbf{S}} = \langle W^{\mathbf{S}}, N^{\mathbf{S}}, V^{\mathbf{S}} \rangle$ 为模态系统 **S** 的典范模型，如果

- ⋆ $W^{\mathbf{S}} = \{\Delta \mid \Delta$ 是极大 **S** 一致集 $\}$;
- ⋆ 对每一 $\Delta \in W^{\mathbf{S}}$，$\Box\varphi \in \Delta$ 当且仅当 $|\varphi|^{\mathbf{S}} \in N^{\mathbf{S}}(\Delta)$;
- ⋆ 对每一 $p \in \mathbb{P}$，$V^{\mathbf{S}}(p) = |p|^{\mathbf{S}}$.

其中 $|\varphi|^{\mathbf{S}} = \{\Delta \in W^{\mathbf{S}} \mid \varphi \in \Delta\}$.

定理 (典范模型基本定理)

设 $\mathfrak{M}^{\mathbf{S}} = \langle W^{\mathbf{S}}, N^{\mathbf{S}}, V^{\mathbf{S}} \rangle$ 为模态系统 **S** 的典范模型，则对任意 $\Delta \in W^{\mathbf{S}}$ 和模态公式 φ，

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash \varphi \iff \varphi \in \Delta.$$

典范模型基本定理的证明：任给公式 φ，施归纳于它的复杂度，除证明对任意 $\Delta \in W^{\mathbf{S}}$ 有 $\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$ 外，还需同时证明 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = |\varphi|^{\mathbf{S}}$.

· $\varphi = p$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash p$，当且仅当 $\Delta \in [\![p]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = V^{\mathbf{S}}(p) = |p|^{\mathbf{S}}$，当且仅当 $p \in \Delta$；

· $\varphi = \neg\psi$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash \neg\psi$，当且仅当 $\Delta \in [\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = W \setminus [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$，当且仅当 $\Delta \notin [\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$，由归纳假设当且仅当 $\psi \notin \Delta$，由 Δ 极大一致当且仅当 $\neg\psi \in \Delta$；从而也有 $[\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = |\neg\psi|^{\mathbf{S}}$；

· $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$，当且仅当 $\Delta \in [\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} \cap [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$，当且仅当 $\Delta \in [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$ 且 $\Delta \in [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$，由归纳假设当且仅当 $\psi_1 \in \Delta$ 且 $\psi_2 \in \Delta$，由 Δ 极大一致当且仅当 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta$；从而也有 $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = |\psi_1 \wedge \psi_2|^{\mathbf{S}}$；

· $\varphi = \Box\psi$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}, \Delta \vDash \Box\psi$，当且仅当 $\Delta \in [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}}$，当且仅当 $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} \in N^{\mathbf{S}}(\Delta)$，而由归纳假设 $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = |\psi|^{\mathbf{S}}$，故当且仅当 $|\psi|^{\mathbf{S}} \in N^{\mathbf{S}}(\Delta)$，当且仅当 $\Box\psi \in \Delta$；从而也有 $[\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}} = |\Box\psi|^{\mathbf{S}}$.

引理 (重要的对应结果)

(1)M 公理框架对应 (nm)：

$$\forall w \forall X \forall Y (X \in N(w) \wedge X \subseteq Y \rightarrow Y \in N(w));$$

(2)C 公理框架对应 (nc)：

$$\forall w \forall X \forall Y (X \in N(w) \wedge Y \in N(w) \rightarrow X \cap Y \in N(w));$$

(3)N 公理框架对应 (nn)：

$$\forall w (W \in N(w)).$$

重要对应结果的证明：
(1)($\Rightarrow$) 假设存在 $X, Y \subseteq W$，使得 $X \in N(w)$ 且 $X \subseteq Y$，但 $Y \notin N(w)$. 取一个 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V，令 $X = [\![p]\!]^{\mathfrak{F},V}$，$Y = [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V}$. 因为 $[\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \subseteq [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V}$，所以 $[\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V} = [\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$，从而 $w \in [\![\Box(p \wedge q)]\!]^{\mathfrak{F},V}$，即 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \Box(p \wedge q)$. 但是 $[\![q]\!]^{\mathfrak{F},V} \notin N(w)$，从而 $w \notin [\![\Box q]\!]^{\mathfrak{F},V}$，即 $\mathfrak{F}, V, w \nvDash \Box q$，从而 $\mathfrak{F}, V, w \nvDash \Box p \wedge \Box q$. 这与 $\mathfrak{F} \vDash \Box(p \wedge q) \to \Box p \wedge \Box q$ 矛盾！
($\Leftarrow$) 假设 $\mathfrak{F} \nvDash \Box(p \wedge q) \to \Box p \wedge \Box q$，则存在 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 和可能世界 w，使得 $\mathfrak{F}, V, w \vDash \Box(p \wedge q)$ 但 $\mathfrak{F}, V, w \nvDash \Box p \wedge \Box q$. 则 $[\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$，以及 $[\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \notin N(w)$ 或 $[\![q]\!]^{\mathfrak{F},V} \notin N(w)$. 令 $X = [\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V}$；如果 $[\![p]\!]^{\mathfrak{F},V} \notin N(w)$，则令 $Y = [\![p]\!]^{\mathfrak{F},V}$，否则令 $Y = [\![q]\!]^{\mathfrak{F},V}$. 从而有 $X \in N(w)$ 且 $X \subseteq Y$，但 $Y \notin N(w)$，这与 $\mathfrak{F}$ 满足 (nm) 矛盾！
(2) 证明与 (1) 类似.
(3) 显然.

定义 (最小典范模型)

称 $\mathbf{S}$ 的典范模型 $\mathfrak{M}^{\mathbf{S}}_{\min} = \langle W^{\mathbf{S}}, N^{\mathbf{S}}_{\min}, V^{\mathbf{S}}\rangle$ 为 $\mathbf{S}$ 的最小典范模型，如果对任意 $\Delta \in W^{\mathbf{S}}$， $N^{\mathbf{S}}_{\min}(\Delta) = \{|\varphi|^{\mathbf{S}} \mid \Box\varphi \in \Delta\}$.

引理

$\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\min} = \langle W^{\mathbf{M}}, N^{\mathbf{M}}_{\min}, V^{\mathbf{M}}\rangle$ 不具有性质 (nm).

证明：任取 $p \in \mathbb{P}$，从 $W^{\mathbf{M}}$ 中取一个满足 $\Box p \in \Delta$ 的 Δ，则 $|p|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta)$. 取 $W^{\mathbf{M}}$ 的一个子集 Y'，使其满足对任意模态公式 ϕ， $Y' \neq |\phi|^{\mathbf{M}}$，且 $Y' \cap |p|^{\mathbf{M}} = \varnothing$. 这样的 Y' 之所以存在，是因为 $W^{\mathbf{M}}$ 的子集有不可数无穷多，而模态公式只有可数无穷多，且 $|p|^{\mathbf{M}} \neq W^{\mathbf{M}}$. 令 $X = |p|^{\mathbf{M}}$， $Y = Y' \cup |p|^{\mathbf{M}}$，显然 $X \subseteq Y$. 假若存在 ψ 使得 $Y = |\psi|^{\mathbf{M}}$，则 $Y' = |\psi|^{\mathbf{M}} \setminus |p|^{\mathbf{M}} = \{\Lambda \in W^{\mathbf{M}} \mid \psi \in \Lambda \ \&\ p \notin \Lambda\} = \{\Lambda \in W^{\mathbf{M}} \mid \psi \wedge \neg p \in \Lambda\} = |\psi \wedge \neg p|^{\mathbf{M}}$，矛盾！因此 $Y \notin N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta)$.

定义 (扩张框架、交闭框架)

给定邻域框架 $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$.

(1) 称 $\mathfrak{F}^+ = \langle W, N^+ \rangle$ 是 $\mathfrak{F}$ 的扩张框架，如果

$$\forall w \forall X (X \in N^+(w) \leftrightarrow \exists Y \in N(w)(Y \subseteq X)).$$

称 $\mathfrak{F}$ 是扩张框架，如果它是它自身的扩张框架.

(2) 称 $\mathfrak{F}^- = \langle W, N^- \rangle$ 是 $\mathfrak{F}$ 的交闭框架，如果

$$\forall w \forall X (X \in N^-(w) \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \exists X_1, \ldots, X_n \in N(w)(X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i)).$$

称 $\mathfrak{F}$ 是交闭框架，如果它是它自身的交闭框架.

引理

对任意邻域框架 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}^{+-} = \mathfrak{F}^{-+}$.

记所有扩张框架组成的类为 $\mathscr{M}$，所有交闭框架组成的类为 $\mathscr{C}$.

引理

(1) $\vDash_{\mathscr{M}} \Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$
(2) $\vDash_{\mathscr{C}} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$

证明：(1) 任取 $\mathfrak{F} \in \mathscr{M}$，及其上的赋值 V 和可能世界 w. 如果 $w \in [\![\Box(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathfrak{F},V}$，则 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$，而 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$，因此 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N^+(w) = N(w)$，所以 $w \in [\![\Box\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}, [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$，从而 $w \in [\![\Box\varphi \wedge \Box\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$.

(2) 任取 $\mathfrak{F} \in \mathscr{C}$，及其上的赋值 V 和可能世界 w. 如果 $w \in [\![\Box\varphi \wedge \Box\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$，则 $w \in [\![\Box\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}, [\![\Box\psi]\!]^{\mathfrak{F},V}$，则 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N(w)$，则 $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{F},V} \cap [\![\psi]\!]^{\mathfrak{F},V} = [\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathfrak{F},V} \in N^-(w) = N(w)$，所以 $w \in [\![\Box(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathfrak{F},V}$.

记 $\mathscr{R} = \mathscr{M} \cap \mathscr{C}$.

定理 ($\mathbf{M}, \mathbf{R}$ 的完全性)

(1) 若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{M}} \varphi$；　(2) 若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{R}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{R}} \varphi$.

证明：(1) 只需证 $\mathbf{M}$ 的最小典范模型 $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\min}$ 的扩张 $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}+}_{\min}$ 仍是 $\mathbf{M}$ 的典范模型. 即证对每一 $\Delta \in W^{\mathbf{M}}$ 都有，

$$\Box\varphi \in \Delta \Longleftrightarrow |\varphi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}+}_{\min}(\Delta).$$

($\Rightarrow$) 若 $\Box\varphi \in \Delta$，则 $|\varphi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta)$，而显然 $N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta) \subseteq N^{\mathbf{M}+}_{\min}(\Delta)$，因此 $|\varphi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}+}_{\min}(\Delta)$.
($\Leftarrow$) 若 $|\varphi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}+}_{\min}(\Delta)$，则存在 $|\psi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta)$，使得 $|\psi|^{\mathbf{M}} \subseteq |\varphi|^{\mathbf{M}}$，则有 $\vdash_{\mathbf{M}} \psi \to \varphi$，由 RM 有，$\vdash_{\mathbf{M}} \Box\psi \to \Box\varphi$. 因为 $|\psi|^{\mathbf{M}} \in N^{\mathbf{M}}_{\min}(\Delta)$，所以 $\Box\psi \in \Delta$，据极大一致集性质，$\Box\varphi \in \Delta$.

(2) 只需证 $\mathbf{R}$ 的最小典范模型 $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{\min}$ 的扩张的交闭 $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}\pm}_{\min}$ 仍是 $\mathbf{R}$ 的典范模型. 即证对每一 $\Delta \in W^{\mathbf{R}}$ 都有，

$$\Box\varphi \in \Delta \iff |\varphi|^{\mathbf{R}} \in N^{\mathbf{R}\pm}_{\min}(\Delta).$$

$(\Rightarrow)$ 据 $N^{\mathbf{R}}_{\min}(\Delta) \subseteq N^{\mathbf{R}\pm}_{\min}(\Delta)$ 显然.
$(\Leftarrow)$ 若 $|\varphi|^{\mathbf{R}} \in N^{\mathbf{R}\pm}_{\min}(\Delta)$，则存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 及 $X_1, \ldots, X_n \in N^{\mathbf{R}+}_{\min}(\Delta)$，使得 $X_1 \cap \ldots \cap X_n = |\varphi|^{\mathbf{R}}$. 从而存在 $|\psi_1|^{\mathbf{R}}, \ldots, |\psi_n|^{\mathbf{R}} \in N^{\mathbf{R}}_{\min}(\Delta)$，使得 $|\psi_1|^{\mathbf{R}} \subseteq X_1, \ldots, |\psi_n|^{\mathbf{R}} \subseteq X_n$，则有 $|\psi_1|^{\mathbf{R}} \cap \cdots \cap |\psi_n|^{\mathbf{R}} \subseteq |\varphi|^{\mathbf{R}}$，进而 $\vdash_{\mathbf{R}} \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$，由 RR 有，$\vdash_{\mathbf{M}} \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \to \varphi$. 因为 $|\psi_1|^{\mathbf{R}}, \ldots, |\psi_n|^{\mathbf{R}} \in N^{\mathbf{R}}_{\min}(\Delta)$，所以 $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n \in \Delta$，据极大一致集性质，$\Box\varphi \in \Delta$.

定义 (滤框架)

称 $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$ 是滤框架，如果对每一 $w \in W$，$N(w)$ 都是滤子，即满足 (nm), (nc), (nn).

定理 ($\mathbf{K}$ 的完全性)

若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{K}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.（其中 $\mathscr{K}$ 为全体滤框架组成的类）

证明：构造模型 $\mathfrak{A} = \langle W, N, V \rangle$，其中 $W = \{\Delta | \Delta$ 是极大 $\mathbf{K}$ 一致集 $\}$；对每一 $\Delta \in W$，$N(\Delta) = \{X \in \wp(W) \mid$ 存在 $\Box\phi \in \Delta$ 使得 $|\phi|^{\mathbf{K}} \subseteq X\}$；对每一 $p \in \mathbb{P}$，$V(p) = |p|^{\mathbf{K}}$.
现证明 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbf{K}$ 的典范模型. 只需证对每一 $\Delta \in W$,

$$\Box\varphi \in \Delta \Longleftrightarrow |\varphi|^{\mathbf{K}} \in N(\Delta).$$

($\Rightarrow$) 显然. ($\Leftarrow$) 若 $|\varphi|^{\mathbf{K}} \in N(\Delta)$，则存在 $\Box\psi \in \Delta$，使得 $|\psi|^{\mathbf{K}} \subseteq |\phi|^{\mathbf{K}}$，则有 $\vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \varphi$，由 RM 有，$\vdash_{\mathbf{K}} \Box\psi \to \Box\varphi$. 因为 $\Box\psi \in \Delta$，且 Δ 是极大一致集，所以 $\Box\varphi \in \Delta$.

下证明对每一 $\Delta \in W$，$N(\Delta)$ 是滤子. 任取 $\Delta \in W$，$X, Y \subseteq W$.
· 如果 $X \in N(\Delta)$ 且 $X \subseteq Y$，则存在 $\Box\phi \in \Delta$，使得 $|\phi|^{\mathbf{K}} \subseteq X$，从而 $|\phi|^{\mathbf{K}} \subseteq Y$，所以 $Y \in N(\Delta)$.
· 如果 $X \in N(\Delta)$ 且 $Y \in N(\Delta)$，则存在 $\Box\phi, \Box\psi \in \Delta$，使得 $|\phi|^{\mathbf{K}} \subseteq X$，$|\psi|^{\mathbf{K}} \subseteq Y$，因为 $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box(\phi \wedge \psi)$，所以 $\Box(\phi \wedge \psi) \in \Delta$，从而 $|\phi \wedge \psi|^{\mathbf{K}} = |\phi|^{\mathbf{K}} \cap |\psi|^{\mathbf{K}} \subseteq X \cap Y$，所以 $X \cap Y \in N(\Delta)$.
· 因为 $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\top$，所以 $\Box\top \in \Delta$，则 $|\top|^{\mathbf{K}} = W \in N(\Delta)$.

定理 ($\mathbf{D}, \mathbf{T}$ 的完全性)

(1) 若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{D}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{D}} \varphi$.（其中 $\mathscr{D}$ 为全体真滤框架组成的类）
(2) 如果对每一 $\mathfrak{F} \in \mathscr{T}$，$\mathfrak{F}$ 是真滤框架，且满足性质 (nt)：

$$\forall w \forall X (X \in N(w) \to w \in X)$$

那么我们有，若 $\Gamma \vDash_{\mathscr{T}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{T}} \varphi$.

证明留给读者.

参考文献

[1] Chellas, B.F.*Modal Logic : An Introduction*[M]. Cambridge University Press, 1980
[2] Pacuit, E.*Neighborhood Semantics for Modal Logic*[M]. Springer, 2017
[3] 李小五. 模态逻辑 [M]. 中山大学出版社, 2005
[4] 刘壮虎. 邻域语义学与推演系统的完全性 [J]. 哲学研究, 2000(9)
[5] 刘壮虎. 必然性的逻辑分析 [J]. 哲学研究, 2002(2)