命题逻辑再进阶

哲学数学计算机中的逻辑课程 (2016 年秋)

王彦晶
北大哲学系

2016 年 11 月 3 日

回顾

给定命题变元的集合 PV=$\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, 命题逻辑的语言与语义:

命题逻辑 (Propositional Logic) 的语言: $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \to \varphi)$ 这里 $p \in$ PV. 我们省略外层的括号及不会误读的括号. 令 $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\bot$, $\top$ 分别为 $\neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\neg\varphi \to \psi$, "$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$", "$p_i \wedge \neg p_i$" 及 "$p_1 \vee \neg p_1$" 的简写 (引号里要进一步把缩写的符号去掉).

一个模型 V 是从 PV (定义域) 到 $\{0, 1\}$ (值域) 的函数, 告诉我们哪些命题变元 (最简单的公式) 是真, 哪些是假. 语义规定什么样的公式 (包括复杂的) 在什么样的模型上为真或假, 由可满足关系$\vDash$ 给出.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} V \vDash p & \Leftrightarrow & V(p) = 1 \\ V \vDash \neg\varphi & \Leftrightarrow & V \nvDash \varphi \\ V \vDash \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & V \nvDash \varphi \text{ 或者} V \vDash \psi \end{array}}$$

一些记法和术语

$V \vDash \varphi$ 读作 "φ 在 V 上为真" 或 "V 满足 φ", 在所有模型上都为真的公式称为有效的(valid) (记为 $\vDash \varphi$).

命题逻辑的有效公式也称重言式(Tautology). 重言式是永远真的句子, 那他们是 "废话" 吗?

给定命题逻辑语言的公式集 Γ, 我们用 $V \vDash \Gamma$ 表示 V 满足 Γ 里面的所有公式.

如果每个满足 Γ 的模型也都满足 φ, 我们就称 φ 是 Γ 的语义后承(Semantic Consequence) (记为 $\Gamma \vDash \varphi$), 显然有效式是空集的语义后承.

命题逻辑的 (一个) 公理系统 (公理 + 推理规则)

我们想只用很少的几条公理和规则推出所有重言式.

公理 (模式):

A1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

A2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

A3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$ (反证法)

规则:

分离规则 (Modus Ponens): 从 $\varphi \to \psi$ 以及 φ 可得 ψ

有各种各样 (在推理能力意义上) 等价的公理系统. 还有其他的证明系统多用规则少用公理, 更容易做证明 (Sequent Calculus 等).

一个 $\varphi \to \varphi$ 的证明 (PROOF)

证明: 从公理出发只能使用公理或者推理规则的有穷序列.

1. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ A1(的特例)
2. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ A2
3. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ MP(1, 2)
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ A1
5. $\varphi \to \varphi$ MP (3, 4)

数学家做的事就是在特定理论下把 $\varphi \to \varphi$ 的前件 (Antecedent) 的内容尽可能多的挪到后件 (Consequent) 去: 用尽量少的前提推出尽量多的结论.

推演 (DEDUCTION) 可看成是 "有前提的证明".

从前提公式集推出一个公式. 与证明不同的地方在于序列中可以使用前提集里的公式. 例如, 证明 $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$.

1. $\psi \to \chi$ 前提
2. $(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$ A1
3. $\varphi \to (\psi \to \chi)$ MP(1, 2)
4. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ A2
5. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$ MP (3, 4)
6. $\varphi \to \psi$ 前提
7. $\varphi \to \chi$ MP(5, 6)

导出规则 (Admissible rules) 是那些加到系统里也不能多证出来其他东西的规则. 例如: 从 $\varphi \to \psi$ 以及 $\psi \to \chi$ 得到 $\varphi \to \chi$

一些导出规则 (可以自己试着去证明它们确实是导出规则)

- 从 φ 得到 $\psi \to \varphi$ (添加前件)
- 从 $\neg\neg\varphi$ 得到 φ (双重否定消去)
- 从 φ 得到 $\neg\neg\varphi$ (双重否定添加)
- 从 $\varphi \to \psi, \psi \to \chi$ 得到 $\varphi \to \chi$ ("三段论")
- 从 $\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi$ 得到 $\neg\varphi$ (归谬法)
- 从 $\neg\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \neg\psi$ 得到 φ (反证法)

我们之前证明了:

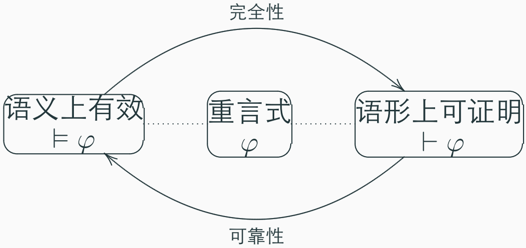
- 命题逻辑的函数完备性: 几个连接词 (甚至一个) 就可以定义出所有可能的布尔函数 (真值表), 比如否定及合取就可以定义所有布尔函数 (回忆: 我们可以用否定 ($\neg$) 和合取 ($\wedge$) 定义析取 ($\vee$), 然后可以用它们把真值表每一行写出来然后再析取起来).

这节课我们希望能证明的, 从而加深对 (命题) 逻辑的理解:

- 演绎定理: $\vdash$ 与 $\to$ 的关系
- 可靠性: 证明系统中可证的都是语义上有效的
- 一致性: 证明系统不能推出矛盾
- 公理独立性: 证明系统的公理缺一不可
- 紧致性: 语义上公式集的有穷子集都可满足则整个集合可满足
- 完全性: 语义上有效的都能在证明系统系统中证明出来

重点:

- “靠谱” 公式集的不同看法: 可靠性及完全性



- 同一个定理的不同证明: 紧致性定理, 完全性定理 (下节课)

准备工作

可以在之前提到的系统中证明的:

- $\varphi \to \varphi$
- $\varphi \to \neg\neg\varphi$
- $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (矛盾推出一切)
- $\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
- $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$

演绎定理

演绎定理: $\vdash$ 与 $\rightarrow$ 的关系

我们说过实质蕴含 $\rightarrow$ 代表了一种条件句, 可以理解为 "如果...那么..." 的关系, 同时 $\vdash$ 也代表了一种推理关系: $\Gamma \vdash \varphi$ 可以理解为有前提 Γ 就可以推出结论 φ. 那么 $\rightarrow$ 与 $\vdash$ 之间有什么本质的联系么?

容易看出来, 如果 $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, 则按照 $\vdash$ 的定义我们就有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. 我们现在就要看看反过来对不对.

注意, 反过来并不是显然的, 比如 (当 Γ 是空集时) $\{p\} \vdash p$ 几乎是废话, 但是正如我们看到的, $\vdash p \rightarrow p$ 并不是那么好证的.

注: 以下用 $\Longrightarrow$ 代表 "元语言"(meta language) 里的实质蕴含.
元语言 是我们用来讨论逻辑形式语言及性质的语言, 我们也用 "如果...那么..." 的句子, 但是是用自然语言说.

演绎定理: $\vdash$ 与 $\to$ 的关系

演绎定理: 对任意公式集 Γ 和公式 φ, ψ:

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \implies \Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

假设 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, 则存在一个有穷证明序列 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \psi$.

1. 我们要证明: $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ (对任意 $1 \leq i \leq n$)
   - 1.1 证 $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_1$. 因为 φ_1 只能是公理或在 Γ 里或是 φ, 用公理 1 及 MP 易证前两个情况, 第三个情况可利用之前已经证明的 $\vdash \varphi \to \varphi$.
   - 1.2 归纳假设(Induction Hypothesis): 对$1 \leq i \leq k$都能证出来 $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$. 我们要证 $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_{k+1}$.
     - 1.2.1 φ_{k+1} 只能是公理或 Γ 里的或 φ 或者通过分离规则得到的. 前三种情况和第一步一样, 假设它是通过 $\varphi_j = \varphi_h \to \varphi_{k+1}$ 以及 φ_h 分离得到 ($h, j \leq k$).
     - 1.2.2 用归纳假设: $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_h \to \varphi_{k+1})$ 以及 $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_h$.
     - 1.2.3 用公理 2 及分离规则可得 $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_{k+1}$.
2. 因为 ψ 就是 φ_k 所以 $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

演绎定理: 搬运工

为了理解上面这个证明, 大家可以取一个 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$ 的具体例子, 按照证明中的步骤试试看, 体会怎么得到 $\{\varphi_1\} \vdash \varphi_2 \to \psi$ 的推演.

有了演绎定理, 我们可以把前提集里的东西一点点往 $\vdash$ 的右边搬运成为蕴含式的前件, 例如 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$ 可以变成 $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)$ (其实等价于 $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$). 这样看, 那些从证明系统里证明出来的蕴含式其实已经包括了我们应该如何做推理的信息.

当然也可以反过来搬运 (演绎定理的逆定理). 比如, 从公理 3, 我们可以得到: $\{\neg\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$, 基于这个可以引入反证法的更直观更容易使用的导出规则: 从 $\neg\varphi \to \psi$ 和 $\neg\varphi \to \neg\psi$ 得到 φ.

可靠性

是不是语形的证明系统推出来的都是语义上有效的?

可靠性 (Soundness): $\vdash \varphi \implies \vDash \varphi$. 证明思路:

1. 公理都有效
2. 分离规则 MP 保持有效: φ 和 $\varphi \to \psi$ 都有效则 ψ 也有效
3. 这样能保证证出来的东西都有效

看上去更强的可靠性: $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \vDash \varphi$. 证明思路:

1. $\Gamma \vdash \varphi$ 则存在有穷证明序列 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$, 这里面用到一些 Γ 里的公式 $\psi_1 \ldots \psi_m$, 按 $\vdash$ 的定义也有 $\{\psi_1 \ldots \psi_m\} \vdash \varphi$.
2. 用演绎定理有 $\vdash \psi_1 \to \cdots \to (\psi_m \to \varphi)$
3. 用上面已证的可靠性有 $\vDash \psi_1 \to \cdots \to (\psi_m \to \varphi)$
4. 根据语义后承的定义及 $\to$ 的语义 $\{\psi_1 \ldots \psi_m\} \vDash \varphi$, 易知 $\Gamma \vDash \varphi$.

一个用途: 一致性变成有模型

称一个逻辑系统是一致的(Consistent) 如果它证不出矛盾 (不能既证明 φ 又证明 $\neg\varphi$).

可靠性说的是对任意 φ 有 $\vdash \varphi \implies \vDash \varphi$. 那么利用可靠性的逆否命题 (Contrapositive), 如果 $\nvDash \varphi \wedge \neg\varphi$ 则 $\nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$,

注意, 矛盾的公式 $\varphi \wedge \neg\varphi$ 按语义不可能在任何模型上为真, 所以只要存在一个模型, 我们就有 $\nvDash \varphi \wedge \neg\varphi$.

这样从可靠性我们可以得到如果存在一个模型则这个逻辑一致. 显然存在模型... 所以命题逻辑的系统是一致的. 注意, 在更复杂的数学推理系统中, 找个模型常常变得很困难.

公理独立性

是不是每个公理都是必须的? 用尽可能少的东西推出所有东西.

一个公理 A 在证明系统 S 中称为独立的, 如果在去掉 A 的系统 $S-A$ 里不能证出 A. 否则 A 可以去掉也没关系.

怎么证一个公理不能 被其他的公理推出来? 基本思路: 找一个这个公理没有的性质, 证明能从其他公理证出来的却都有这个性质.

我们这里又可以利用可靠性来证明: 缺少公理 A 的系统里证明出来的都相对于某个特殊语义有效, 但 A 相对于这个特殊语义不有效.

1. 定义一个不一样的语义 $\Vdash$ 使得:
    1.1 对任意 φ 有 $\vdash_{S-A} \varphi \implies \Vdash \varphi$ (对 $\Vdash$ 的可靠性)
    1.2 但是 $\nVdash A$
2. 我们有 $\nvdash_{S-A} \varphi$

例子: 公理 3 的独立性. 可以证明系统中三条公理缺一不可.

公理 3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$.

定义新语义的可满足关系 $\Vdash$ 如下:

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
V \Vdash p & \Leftrightarrow & V(p) = 1 \\
V \Vdash \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & V \nVdash \varphi \text{ 或者} V \Vdash \psi \\
V \nVdash \neg\varphi & & \text{永远}
\end{array}
}
$$

注意, 我们没有改变 $\to$ 的语义, 这样的话我们可以证明:

1. 对任意 φ 有 $\vdash_{S-\text{公理 3}} \varphi \implies \Vdash \varphi$ (没有公理 3 的系统对 $\Vdash$ 的可靠性)
2. 但是 $\nVdash (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$: 令 $V(p) = 0, V(q) = 1$.

紧致性

可满足是不是就是有穷可满足?

$\Gamma \vdash \varphi$ 的推演按定义其实只会用到 Γ 里有穷多条前提. 然而 $\Gamma \vDash \varphi$ 的定义里没有这种有穷的限制. 一个自然的问题是, 对无穷的 Γ, 会不会出现 $\Gamma \vDash \varphi$ 而对任意有穷的 $\Delta \subseteq \Gamma$, 都有 $\Delta \nvDash \varphi$ 的情况?

命题逻辑不会出现这种情况, 因为它有 紧致性(Compactness): 任给公式集 Γ, 若 Γ 的任意有穷子集可被某些模型满足, 则 Γ 可满足.

假设对 Γ 的每个有穷子集 Δ 都有 $\Delta \nvDash \varphi$, 则 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 的每个有穷子集都可满足, 所以按照紧致性 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 也可满足, 即 $\Gamma \nvDash \varphi$. 所以命题逻辑不会出现开始说的那种情况.

如果语言里可以说无穷析取, 就没有紧致性了, 例如下面的集合的有穷子集都可满足, 但整个集合不可满足: $\{\bigvee_1^\infty p_i, \neg p_1, \neg p_2, \ldots\}$

证明命题逻辑从语义上讲具有紧致性

假设 Γ 的任意有穷子集可满足, 我们要证 Γ 可满足.

基本想法: 能不能把那些有穷子集的一些合适的模型拼起来造一个满足整个 Γ 模型? 假设命题变元是 $p_1, p_2, \ldots$, 要给它们相应的真值 $v_1, v_2 \cdots \in \{0, 1\}$. 首先, v_1 应该等于多少? 一个简单的想法是: 如果每个 Γ 的有穷子集都有某个 $V(p_1) = 1$ 的模型, 那么显然让 $v_1 = 1$ 是安全的, 否则就暂且让 $v_1 = 0$ 吧. 可是也许大家会问, 那如果有些有穷子集只有$V(p_1) = 1$ 的模型, 有些只有$V(p_1) = 0$ 的模型怎么办? 假设有这样的情况, 取一个只有$V(p_1) = 1$ 模型的有穷子集 Δ, 再取一个只有$V(p_1) = 0$ 模型的有穷子集 Δ', 把这两个子集合起来 $\Delta \cup \Delta'$ 还是个有穷子集, 它也应该有某个模型 V 啊, 可是那这时候 $V(p_1)$ 等于什么呢? 出矛盾了! 所以没有这样的情况.

第一个证明的思路 (用 $\Delta \subseteq_f \Gamma$ 表示 Δ 是 Γ 的有穷子集)

现在 v_1 已经定义好了，v_2 还是按照这种思路定义: 如果每个 Γ 的有穷子集都有某个 $V(p_1) = v_1$ 且 $V(p_2) = 1$ 的模型, 那么显然让 $v_2 = 1$ 也是安全的, 否则就让 $v_2 = 0$. 更一般的, 定义 v_{k+1} 如下:

1. $$v_{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{若对每个}\Delta \subseteq_f \Gamma\text{, 都存在某个符合}v_1, \ldots v_k, \\ & \text{且}V(p_{k+1}) = 1\text{的满足 }\Delta\text{ 的模型 }V \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$
2. 要证明: 每个 $i \geq 1$, 每个 $\Delta \subseteq_f \Gamma$ 都有符合 $v_1, \ldots, v_i$ 的模型.
   2.1 假设对 $i \leq k$ 都成立, 要证明 $i = k + 1$ 时也成立
      2.1.1 $v_{k+1} = 1$ 根据 v_{k+1} 定义显然成立
      2.1.2 $v_{k+1} = 0$ 则有存在 $\Sigma \subseteq_f \Gamma$, 没有符合 $v_1, \ldots v_k, V(p_{k+1}) = 1$ 的模型. 这时取任意一个 $\Delta \subseteq_f \Gamma$, 考虑 $\Sigma \cup \Delta$ (还是有穷集哦), 根据归纳假设, 有符合 $v_1 \ldots v_k$ 的模型 V 使得 $V \vDash \Delta \cup \Sigma$, 因为 Σ 没有符合 $v_1 \ldots v_k, V(p_{k+1}) = 1$ 的模型, 所以 V 符合 $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ 且 $V \vDash \Delta$.

第一个证明的思路 (再继续)

最后我们要证明给每个 p_i 赋值 v_i 真能造出一个满足 Γ 的模型.

令 $V^*(p_i) = v_i$, 要证 V^* 就是一个满足 Γ 的模型. 下面用反证法, 假设不然, 则有 $\varphi \in \Gamma$ 使得 $V^* \nvDash \varphi$. 注意, 一个公式里最多有有穷多个命题变元符号, 而且根据语义只有这些有穷多个命题变元的真假会影响这个公式的真假. 令 k 为集合 $\{i \mid p_i\text{出现在 } \varphi \text{ 里}\}$ 里面最大的数. 那么显然 $p_1, \ldots, p_k$ 这些命题变元的赋值足以决定公式 φ 的真值 (其实不见得用到所有的这些 p_i).

注意到 $\{\varphi\}$ 也是一个 Γ 的有穷子集, 根据刚才我们证明的 (2), $\{\varphi\}$ 有一个符合 $v_1, \ldots, v_k$ 的模型 V, 但 V^* 和 V 在 $v_1, \ldots, v_k$ 上一样且只有这些影响 φ 的真值, 所以 $V^* \vDash \varphi$, 矛盾. 所以 V^* 满足 Γ.

完全性

下节课...