命题逻辑 (2)

哲学数学计算机中的逻辑课程 (2016 年秋)

王彦晶
北大哲学系

2016 年 10 月 20 日

真值表语义

合取 conjunction ($\wedge$): “且”, 析取 disjunction ($\vee$): “或者”, 否定 negation ($\neg$): “并非”

(实质) 蕴含 material implication ($\rightarrow$): 一类 “如果... 则”.

用 1 代表真, 用 0 代表假.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

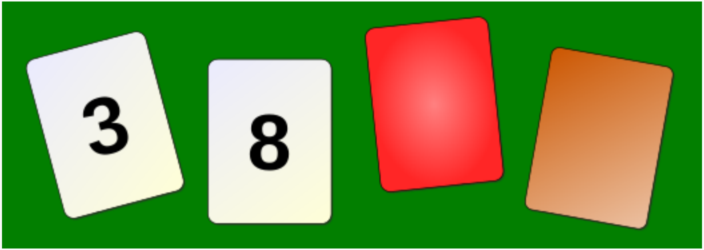
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

WASON 测试 (WIKI)

桌面上有四张牌，每张牌一面是数字，一面是颜色, 能看到的情况如下。现在有人宣称: (对这些牌来说) 如果一面是偶数, 那么另一面一定是红色的. 请问你要翻开什么牌才能完全验证他说的是不是真话?



p : 牌有一面是偶数, q : 牌有一面是红色, 问要检查哪些牌的背面才能验证 $p \to q$ 是不是真的? 给定: $1 : \neg p \quad 2 : p \quad 3 : q \quad 4 : \neg q$.

另一个小测试

日常生活中我们使用的或者经常是不相容的或者 (XOR), 例如 “你可以选择出国或者保研”; “我去或者他去都行”...

- 如果他有 J 那么也有 A (不相容的) 或者:
- 如果他没有 J 则还有 A.

现在假设: 他确实有 J, 能推出什么?

感兴趣的话可以参考推理心理学 (Psychology of reasoning) 的相关研究.

函数完备性

是不是所有这样的函数都可以被基本的连接词组合构造出来?

每个 n 元连接词可以看做一个从 $\{1,0\}^n$ 到 $\{1,0\}$ 的函数.

p	q	p NAND q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	p XOR q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	r	SSFCDS (p,q,r)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

p NAND $q := \neg(p \wedge q)$, p XOR $q := (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,
SSFCDS $(p,q,r) := (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$.

最笨的办法

p	q	r	SSFCDS (p, q, r)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

把最后值为真的都写出来, 然后用 $\vee$ 连起来 (Disjunctive normal form): $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(布尔) 函数完备性

一个算子的集合被称作布尔函数完备的, 如果用这个集合的算子可以构造出任意的布尔函数.

按照刚才的笨办法, $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是布尔函数完备的.

$p \to q := (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
等价于 $\neg(p \wedge \neg q)$ 等价于 $\neg p \vee q$.

$\{\neg, \wedge\}$ 是完备的, $\{\vee, \wedge\}$ 是不是布尔函数完备的? 不是!

就一个算子行不行? 行! $\{\text{NAND}\}$.

$\neg p := p \text{ NAND } p$,
$p \wedge q := \neg(p \text{ NAND } q) = (p \text{ NAND } q) \text{ NAND } (p \text{ NAND } q)$.

简洁性

到底取那些做初始连接词?

NAND 一个足够了, 但是表达起来会非常复杂:

$$\begin{aligned} & p \vee q \\ & \quad = \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ & \quad = (\neg p \wedge \neg q) \text{ NAND } (\neg p \wedge \neg q) \\ & \quad = ((\neg p \text{ NAND } \neg q) \text{ NAND } (\neg p \text{ NAND } \neg q)) \text{ NAND } (\ldots) \\ & \quad = \ldots \end{aligned}$$

有时两个逻辑语言能表达同样的意思, 但是一个比另外一个更<u>简洁</u>.

所有常用的连接词都是逻辑连接词?

"但是" (but)?

它与 "并且" 有逻辑上的区别么?

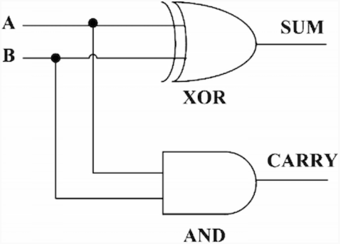
一个逻辑哲学问题: 什么样的连接词是 "逻辑的"?

逻辑电路及人工神经网

连接词是逻辑门 (LOGIC GATE)

电路中的逻辑门可通过晶体管实现: 根据输入的高/低电平输出高/低电平 (布尔函数).

二进制加法之半加器 (half adder)

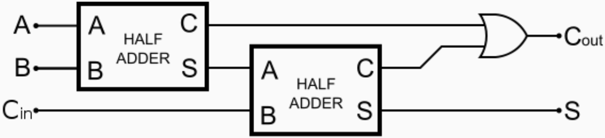


$SUM = A \text{ XOR } B, CARRY = A \wedge B$

A	B	SUM	CARRY
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

公式是电路

二进制加法之全加器 (full adder):

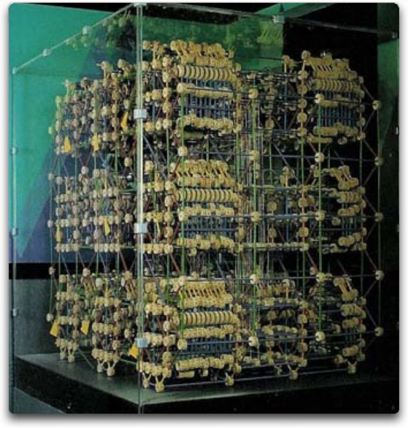


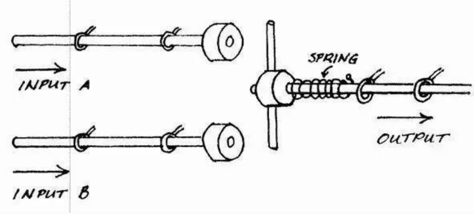
$C_{out} = (A \wedge B) \vee ((A \text{ XOR } B) \wedge C_{in}) = (A \wedge B) \text{ XOR } ((A \text{ XOR } B) \wedge C_{in})$

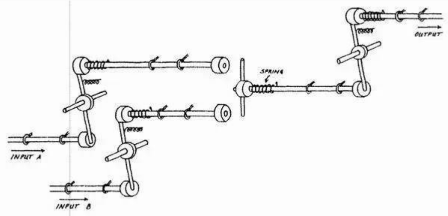
$S_{out} = (A \text{ XOR } B) \text{ XOR } C_{in}$

逻辑电路可以被写成命题逻辑的公式! 两个电路输出是否等价可以被转化为两个公式是否等价 $\varphi \leftrightarrow \psi$ (电路优化).

用什么实现逻辑操作都行







用什么实现不重要 FROM 《三体》

“朕当然需要预测太阳的运行，但你们让我集结三千万大军，至少要首先向朕演示一下这种计算如何进行吧？”

“陛下，请给我三个士兵，我将为您演示。”冯·诺伊曼兴奋起来。

“三个？只要三个吗，朕可以轻易给你三千个。”秦始皇用不信任的目光扫视着着冯·诺伊曼。

伟大的陛下，您刚提到东方人在科学思维上的缺陷，就是因为你们没有意识到，复杂的宇宙万物其实是由最简单的单元构成的。我只要三个，陛下。”

秦始皇挥手召来了三名士兵，他们都很年轻，与秦国的其他士兵一样，一举一动像听从命令的机器。

“我不知道你们的名字，” 冯 · 诺伊曼拍拍前两个士兵的肩，” 你们两个负责信号输入，就叫 ‘入 1’、‘入 2’ 吧，” 他又指指最后一名士兵，” 你，负责信号输出，就叫 ‘出’ 吧，” 他伸手拨动三名士兵，” 这样，站成一个三角形，出是顶端，入 l 和入 2 是底边，”

“哼，你让他们成楔形攻击队形不就行了？” 秦始皇轻蔑地看着冯 · 诺伊曼。

牛顿不知从什么地方掏出六面小旗，三白三黑，冯 · 诺伊曼接过来分给三名士兵，每人一白一黑，说: 白色代表 0，黑色代表 1。好，现在听我说，出，你转身着着入 1 和入 2，如果他们都举黑旗，你就举黑旗，其他的情况你都举白旗，这种情况有三种: 入 1 白，入 2 黑; 入 1 黑，入 2 白; 入 1、入 2 都是白。”

“我觉得你应该换个颜色，白旗代表投降。” 秦始皇说。

兴奋中的冯 · 诺伊曼没有理睬皇帝，对三名士兵大声命令:” 现在开始运行! 入 1 入 2，你们每人随意举旗，好，举! 好，再举! 举!”

入 1 和入 2 同时举了三次旗，第一次是黑黑，第二次是白黑，第三次是黑白。出都进行了正确反应，分别举起了一次黑和两次白。

“这三个人组成了一个计算系统的部件，是门部件的一种，叫 ‘与门’。” 冯 · 诺伊曼说完停了一会儿，好让皇帝理解。

秦始皇面无表情地说：“朕是够郁闷的，好，继续。”

ARTIFICIAL NEURON NETWORK

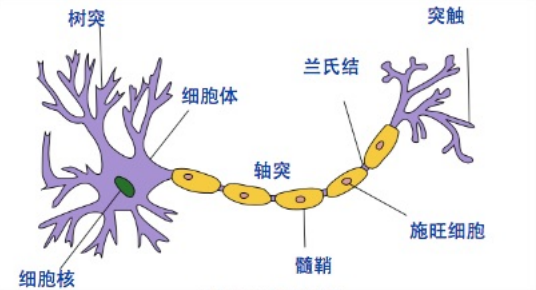
A LOGICAL CALCULUS OF THE IDEAS IMMANENT IN NERVOUS ACTIVITY

WARREN S. MCCULLOCH AND WALTER PITTS

FROM THE UNIVERSITY OF ILLINOIS, COLLEGE OF MEDICINE, DEPARTMENT OF PSYCHIATRY AT THE ILLINOIS NEUROPSYCHIATRIC INSTITUTE, AND THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Because of the "all-or-none" character of nervous activity, neural events and the relations among them can be treated by means of propositional logic. It is found that the behavior of every net can be described in these terms, with the addition of more complicated logical means for nets containing circles; and that for any logical expression satisfying certain conditions, one can find a net behaving in the fashion it describes. It is shown that many particular choices among possible neurophysiological assumptions are equivalent, in the sense that for every net behaving under one assumption, there exists another net which behaves under the other and gives the same results, although perhaps not in the same time. Various applications of the calculus are discussed.

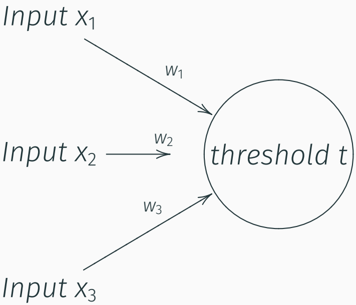
神经元



典型神经元的结构

全有全无定律 (“All-or-none”) : 动作电位或者不产生, 或者产生额定强度的动作电位. 一旦产生, 它将沿着轴突一直传导至末端, 在传导过程中, 动作电位的强度总是保持不变.

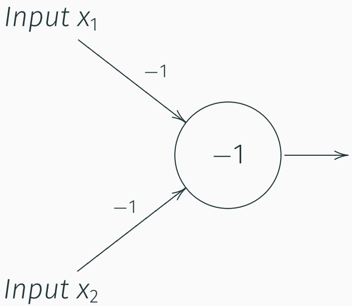
ARTIFICIAL NEURON: PERCEPTRON 感知机



$$\longrightarrow \textit{output } y = \begin{cases} 0 & \sum_i w_i x_i < t \\ 1 & \sum_i w_i x_i \geq t \end{cases}$$

输入输出的都是 0 或者 1, 权重 w_i 是实数. 这种神经元可以用来做决定: 选不选这门课 (y) 取决于: 感不感兴趣 (x_1), 给分高不高 (x_2), 老师讲的好不好 (x_3), 当然每个人的权重都不一样, 阈值也不一样.

用神经元模拟逻辑门



$$\text{output } y = \begin{cases} 0 & \sum_i w_i x_i < t \\ 1 & \sum_i w_i x_i \geq t \end{cases}$$

这是什么逻辑连接词?

一个简单神经元无法模拟 XOR

$p\ XOR\ q := (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

$$1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \geq t$$

$$0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \geq t$$

$$0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 < t$$

$$1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 < t$$

能得到矛盾:

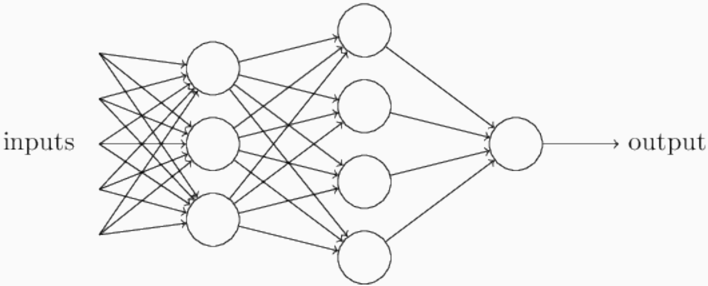
$$w_1 \geq t$$

$$w_2 \geq t$$

$$0 < t$$

$$w_1 + w_2 < t$$

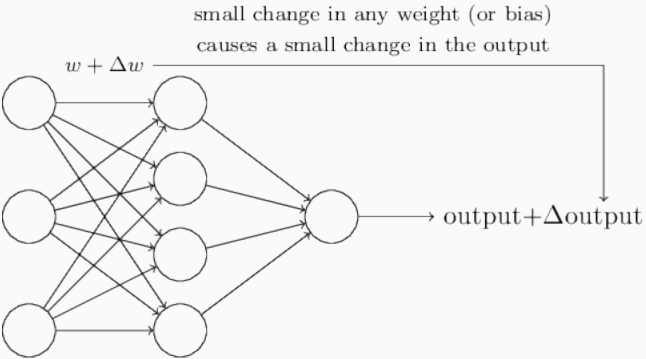
一个神经元很无聊, 多了就有意思了.



我们可以设计一些学习算法, 让机器通过已知的数据自动去调整网络的权重和阈值以适应数据.

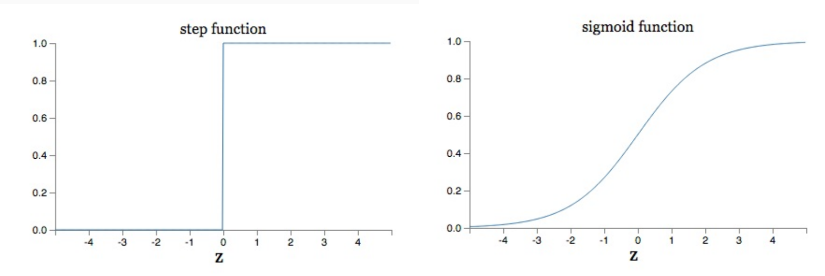
为了得到好的学习算法 (FROM MICHAEL NIELSEN)

我们需要对于权重和阈值的小的扰动也只会带来对于输出结果的小的扰动, 这样才能一点点逼近学习.

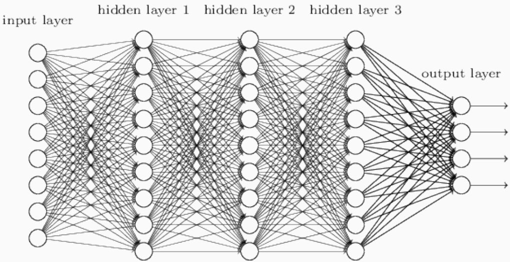


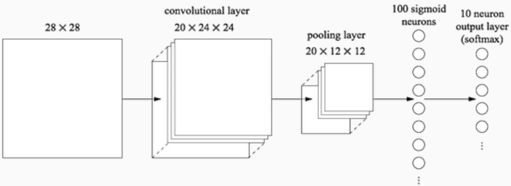
SIGMOID NEURON

输入输出是 [0, 1] 内的实数, 取 Σ 函数算输出值.



“深度” 学习


input layer
hidden layer 1
hidden layer 2
hidden layer 3
output layer


28 × 28
convolutional layer
20 × 24 × 24
pooling layer
20 × 12 × 12
100 sigmoid neurons
10 neuron output layer (softmax)

命题逻辑的一个公理系统

一个公理系统

考虑语言:

$$\varphi ::= \varphi \mid \neg\varphi \mid (\varphi \to \varphi)$$

公理模式:

- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

分离规则 (Modus Ponens): 从 $\varphi \to \psi$ 以及 φ 可得 ψ

一个证明 $\varphi \to \varphi$

1. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ 公理 1
2. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ 公理 2
3. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ MP(1, 2)
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ 公理 1
5. $\varphi \to \varphi$ MP (3, 4)

可以问的问题 (下次课)

- 可靠性
- 完全性
- 一致性
- 公理独立性
- $\vdash$ 与 $\rightarrow$ 的关系 (演绎定理)

与命题逻辑有关的逻辑谜题 BY PROF. KOOI