从博弈 (游戏) 看命题逻辑

哲学数学计算机中的逻辑课程 (2016 年秋)

王彦晶
北大哲学系

2016 年 10 月 13 日

命题逻辑 (Propositional Logic) 背景

经典命题逻辑的形式语义

抽象的游戏

逻辑对话游戏 (Dialogic Logic)

博弈语义 (Game Semantics)

可满足性 游戏 (Satisfiability Game)

命题逻辑 (PROPOSITIONAL LOGIC) 背景

亚里士多德之后 (德摩根, 布尔之前)

- 三段论里面并没有涉及 “或者”, “并且”, “如果... 则...” 等重要的 (逻辑) 连接词. 能谈论的命题简单, 缺乏基本的组合型.
- 但是提出了排中律: 一个命题或者真或者假; 以及无矛盾律: 没有命题既真又假.
- 斯多亚 (Stoic) 学派 (公元前三世纪) 开始关注命题连接词
- 特别是关于条件句语义的讨论 (Sextus Empiricus 的记述)
- Galen, Boethius, Abelard, Ockham...

CHRYSIPPUS 整理的有效推理形式

- If the first, then the second; but the first; therefore the second.
- If the first, then the second; but not the second; therefore, not the first.
- Not both the first and the second; but the first; therefore, not the second.
- Either the first or the second [and not both]; but the first; therefore, not the second.
- Either the first or the second; but not the second; therefore the first.

真值表语义

合取 conjunction ($\wedge$): “且”, 析取 disjunction ($\vee$): “或者”, 否定 negation ($\neg$): “并非”

(实质) 蕴含 material implication ($\rightarrow$): 一类 “如果... 则”.

用 $\top$ 代表真, 用 $\bot$ 代表假.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

p	q	$p \rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

实质蕴涵不能处理

- 因果条件句
- 反事实条件句
- 相关蕴涵
- 严格蕴涵

经典命题逻辑的形式语义

基本语言与语义

给定命题符号集 PV, 用 Backus-Naur Form (BNF) 定义形式语言 PL_{PV}:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi)$$

其中 $p \in \mathsf{PV}$.

本质上在说如下形成规则:

- 在 PV 里的 p 是公式
- 如果 φ 是公式则 $\neg\varphi$ 也是公式
- 如果 φ 和 ψ 都是公式, 则 $(\varphi \vee \psi)$ 也是公式
- 只有靠如上规则生成的东西是公式, 其他都不是 公式.

子公式 (SUBFORMULA)

φ 的子公式: 出现在 φ 里也是公式的符号串.

定义 φ 的所有子公式的集合 $SF(\varphi)$ 为满足如下条件最小 的集合:

- $\varphi \in SF(\varphi)$
- 若 $\neg\psi \in SF(\varphi)$ 则 $\psi \in SF(\varphi)$
- 若 $(\varphi \vee \psi) \in SF(\varphi)$ 则 $\{\varphi, \psi\} \subseteq SF(\varphi)$.

例如, $SF(\neg(p \vee \neg q)) = \{\neg(p \vee \neg q), (p \vee \neg q), \neg q, p, q\}$.

如果 φ 的长度是 n, 那么 $SF(\varphi)$ 里面最多有多少个公式? ($\leq n$, 可以归纳证明).

形式语义

模型就是 “真值表” $V : \mathbf{PV} \to \{\top, \bot\}$(是个函数).

语义: 什么样的公式在什么样的模型上为真, 什么样的模型上为假

$$\begin{array}{lcl} V \vDash p & \Leftrightarrow & V(p) = \top \\ V \vDash \neg\varphi & \Leftrightarrow & V \nvDash \varphi \\ V \vDash \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & V \vDash \varphi \text{ 或者} V \vDash \psi \end{array}$$

在经典命题逻辑中 $\vee$ 和 $\to$ 可以被其他符号定义.

$$\begin{array}{lcl} V \vDash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & V \vDash \varphi \text{ 并且} V \vDash \psi \text{ (等价于} V \vDash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \\ V \vDash \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & \text{如果} V \vDash \varphi \text{ 则} V \vDash \psi \text{ (等价于} V \vDash \neg\varphi \vee \psi) \end{array}$$

本节目的: 把经典命题逻辑的相关判断游戏化.

抽象的游戏

抽象的游戏概念

- 游戏者 (Players)
- 游戏的状态 (Configurations/states)
- 游戏的规则 (Rules) : 什么情况下该谁走, 有哪些能走的
- 游戏的输赢条件 (Winning conditions)

玩家 X 的策略: 该我走的时候我怎么走 (根据游戏所在状态和所有玩家之前的行动历史决定).

我们关心的是游戏中特定玩家的**必胜策略** (winning strategy): 不管别的玩家怎么玩, 我都赢.

重要的基本定理 (一般叫 Zemelo 定理): 两个人 的有穷深度 的完美信息 的总有输赢 的博弈必有一个玩家有必胜策略.

例子: 围棋

围棋是一个有穷的二人完美信息游戏 (执白先行), 但是有平局, 不能直接应用 Zemelo 定理. 但我们可以做如下转换:

令 White-Chess 是平局算白棋赢的游戏, 类似定义 Black-Chess.

White-Chess	Black-Chess	Chess
白棋有必胜策略	白棋有必胜策略	白棋有必胜策略
黑棋有必胜策略	白棋有必胜策略	逻辑上不可能
白棋有必胜策略	黑棋有必胜策略	都有不输的策略
黑棋有必胜策略	黑棋有必胜策略	黑棋有必胜策略

Corollary (Zemelo 1913)

白棋有必胜策略, 或者黑棋有必胜策略, 或者两方都可以保平.

用游戏的角度看别的东西

命题 A 成立 iff 在游戏 G_A 中 Player X 有**必胜策略**.

A 成立 iff 特定的玩家必然能赢

iff: if and only if (当且仅当)

逻辑对话游戏 (DIALOGIC LOGIC)

藏传佛教辩经 (网图)

LORENZEN GAME (1958) 基本规则

给定 $\varphi \in PL^{+}_{\mathsf{PV}}$ (也包括 $\wedge, \rightarrow$ 的语言), 大致定义 G^{L}_{φ} 如下:

- 游戏者: 支持者 (Proponent) 和反对者 (Opponent)
- 游戏的状态: φ 及其子公式
- 游戏的规则:
  - P 首先断言 (assert) 公式 φ, 之后两人轮流走
  - 每轮 O 只可针对上一轮选择攻击 (A) 或者防御 (D).
  - 每轮 P 可对之前任何轮选择攻击或者防御.
  - 对已断言的公式 $\psi \vee \psi'$ 可以攻击:“which one?”
  - 对已断言的公式 $\psi \wedge \psi'$ 可以攻击:“left?” “right?”
  - 对已断言的公式 $\psi \rightarrow \psi'$ 及 $\neg\psi$ 可攻击: ”What if? Assert(ψ)”
  - 面对攻击可以用 assert 来防御 (分具体的攻击情况, 对 $\neg\varphi$ 的攻击没法防御). O 可以 assert 任何原子命题, P 只能 assert 已经 O 提出来的原子命题 (非原子的可以任意 assert).

一个例子 (FROM BENEDIKT LÖWE)

一方没得走了, 另一方就赢了.

0		–		$\mathbf{assert}(\neg\neg p \to p)$
1	$\mathbf{attack}(0)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(\neg\neg p)$		
2			$\mathbf{attack}(1)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(\neg p)$
3	$\mathbf{attack}(2)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(p)$		
4			$\mathbf{defend}(1)$	$\mathbf{assert}(p)$
5	–	–		

其他例子 (强烈建议大家玩玩看)

- $p \to p$
- $p \vee \neg p$
- $p \to (q \to p)$
- $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

LORENZEN GAME (1958) 构造性规则

给定 $\varphi \in PL^{+}_{\mathsf{PV}}$, 定义 G^{LI}_{φ} 如下:

- 游戏者: 支持者 (Proponent) 和反对者 (Opponent)
- 游戏的状态: φ 及其子公式
- 游戏的规则:
  - P 首先断言 (assert) 公式 φ, 之后两人轮流走
  - 每轮 O 只可对上一轮选攻击 (A) 或者防御 (D).
  - 每轮 P 可对任何轮选择攻击, 但只能对上一轮还没回答过的攻击做防御.
  - 对已断言的公式 $\psi \vee \psi'$ 可以攻击:“which one?”
  - 对已断言的公式 $\psi \wedge \psi'$ 可以攻击:“left?” “right?”
  - 对已断言的公式 $\psi \to \psi'$ 及 $\neg\psi$ 可攻击: ”What if? Assert(ψ)”
  - 用 Assert(断言) 来防御. O 可以 Assert 任何原子命题, P 只能 Assert 已经 O 提出来的原子命题.

例子 (FROM BENEDIKT LÖWE)

0		—		$\mathbf{assert}(p \wedge q \to q \wedge p)$
1	$\mathbf{attack}(0)$	$\mathbf{what\ if?}\ \mathbf{assert}(p \wedge q)$		
2			$\mathbf{attack}(1)$	$\mathbf{left?}$
3	$\mathbf{defend}(2)$	$\mathbf{assert}(p)$		
4			$\mathbf{attack}(1)$	$\mathbf{right?}$
5	$\mathbf{defend}(4)$	$\mathbf{assert}(q)$		
6			$\mathbf{defend}(1)$	$\mathbf{assert}(q \wedge p)$
7	$\mathbf{attack}(6)$	$\mathbf{right?}$		
8			$\mathbf{defend}(7)$	$\mathbf{assert}(p)$
9	—	—		

之前的例子 (FROM BENEDIKT LÖWE)

0		–		$\mathbf{assert}(\neg\neg p \to p)$
1	$\mathbf{attack}(0)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(\neg\neg p)$		
2			$\mathbf{attack}(1)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(\neg p)$
3	$\mathbf{attack}(2)$	$\mathbf{what\ if?\ assert}(p)$		
4			$\mathbf{defend}(1)$	$\mathbf{assert}(p)$
5	–	–		

注意: 在新规则下, 第 4 步是不能走的! 这时候 P 就没有必胜策略了!

对应结果

Theorem

φ 是经典命题逻辑的有效式 *iff* 在 G^{L}_{φ} 中 P 有一个必胜策略.

Theorem

φ 是直觉主义命题逻辑的有效式 *iff* 在 G^{LI}_{φ} 中 P 有一个必胜策略.

直觉主义逻辑里双重否定和排中律不成立!

博弈语义 (GAME SEMANTICS)

用游戏给逻辑公式语义 (HINTIKKA)

给定一个真值表 V, 和一个公式 φ, 定义一个语义游戏 $G_{V,\varphi}$:

- 游戏者: 支持者 (Proponent) 和反对者 (Opponent)
- 游戏的状态: φ 及其子公式
- 游戏的规则:
  - P 首先断言公式 φ (在 V 上是真的)
  - 如果当前公式是 $\psi \vee \psi'$ 则 P 可以选择 ψ 或 ψ 其中一个继续
  - 如果当前公式是 $\neg\psi$ 则 P 和 O 的角色互换 从 ψ 继续
- 游戏的输赢条件: 状态是 $p \in \mathbf{PV}$, 若 $V(p) = \top$ 则 (当前的)P 赢, 反之则 (当前的)O 赢.

这种游戏符合 Zemelo 定理的要求, 肯定有一个玩家有必胜策略.

例子: $p \vee \neg(\neg q \vee p)$, $V(p) = \bot, V(q) = \top$

游戏和语义间的转换

Theorem

任给 V 和 φ, $V \vDash \varphi$ *iff* P 在语义游戏 $G_{V,\varphi}$ 中有必胜策略.

证明: 给定任意 V, 对 φ 的结构做归纳证明 iff 的两边:

- $\varphi = p$: $V \vDash p$ iff $V(p) = \top$ iff P 在 $G_{V,p}$ 中有必胜策略.
- 归纳假设 (Induction Hypothesis): 对 φ 的子公式都成立
- $\varphi = \neg\psi$: $V \vDash \neg\psi$ iff $V \nvDash \psi$ iff P 在 $G_{V,\psi}$ 中没有必胜策略 iff (Zemelo) O 在 $G_{V,\psi}$ 中有必胜策略 iff P 在 $G_{V,\neg\psi}$ 中必胜.
- $\varphi = \psi \vee \psi'$ iff $V \vDash \psi$ 或者 $V \vDash \psi'$ iff P 在 $G_{V,\psi}$ 中有必胜策略或者 P 在 $G_{V,\psi'}$ 中有必胜策略 iff P 在 $G_{V,\psi\vee\psi'}$ 中有必胜策略.

可 满 足 性 游 戏 (SATISFIABILITY GAME)

可满足性 游戏 (SATISFIABILITY GAME)

给定 PV, 用 BNF 定义形式语言 $PL^{\neg}_{\mathsf{PV}}$:

$$\varphi ::= p \mid \neg p \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi)$$

其中 $p \in \mathsf{PV}$.

$PL^{\neg}_{\mathsf{PV}}$ 其实与 PL_{PV} 等价的 (下节课讲).

例如: $\neg(p \vee q)$ 等价于 $\neg p \wedge \neg q$.

可满足性判断 (Satisfiability checking): 是否有 V 使得 $V \vDash \varphi$.

注意, 在这里 φ 不可满足当且仅当 $\neg\varphi$ 有效.

命题的 SAT 问题可以 encode 很多其他问题 (NP 完全问题), 计算机中逻辑的一大块研究就是找到实际上更快的 SAT solver.

可满足性 游戏 (SATISFIABILITY GAME)

给定 $\varphi \in PL^{\neg}_{\mathsf{PV}}$, 定义 G^{SAT}_{φ} 如下:

- 游戏者: 支持者 (Proponent) 和反对者 (Opponent)
- 游戏的状态: φ 及其子公式组成的公式集
- 游戏的规则:
  - P 首先提出公式集 $\{\varphi\}$
  - 如果公式集是 $\{\psi \vee \psi', \dots\}$ 形式, 则 P 可以选择 ψ 或 ψ' 其中一个并生成相应的新的公式集 $\{\psi, \dots\}$ 或 $\{\psi', \dots\}$ 继续.
  - 如果公式集是 $\{\psi \wedge \psi', \dots\}$ 形式, 则 O 必须选择 $\{\psi, \psi', \dots\}$.
- 胜利条件: 如果没的走了, 并且最终的集合里不同时出现 p 及 $\neg p$ 这样的矛盾, 则 P 赢, 反之则 O 赢.

例子: $(p \wedge \neg p)$, $(q \vee \neg p) \wedge (p \wedge \neg q)$.

可满足性 游戏 (SATISFIABILITY GAME)

Theorem

给定一个公式 $\varphi \in PL^{\neg}_{PV}$, φ 可满足 *iff* P 在 G^{SAT}_{φ} 中有必胜策略.

证明:

- 从左到右: 根据 V 决定 P 对于 $\{\psi \vee \psi', \dots\}$ 的选择, 一直保持当前集合的公式都是真的.
- 从右到左: 根据必胜策略写出整个游戏过程, 从叶节点造一个模型出来, 返回去保持当前集合里的公式为真.

博弈与逻辑的关系

逻辑相关的判断变成可操作的博弈

- 一般的语义游戏 (在模型上判断公式是否为真)
- 可满足性/有效性游戏 (一个公式是不是可满足或是有效的)
- 模型比较游戏 (判断两个模型是不是 “一样”)

用逻辑研究游戏

- Game Logic
- Epistemic Logic for foundation of Game Theory