(命题) 模态逻辑

哲学数学计算机中的逻辑课程 (2016 年秋)

王彦晶
北大哲学系

2016 年 11 月 17 日 (世界哲学日)

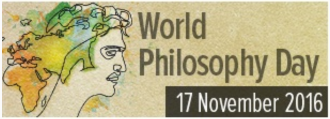
背景

什么是“模态”

可能世界语义

公理及证明系统们

世界哲学日



“今年，我们于国际宽容日次日庆祝世界哲学日。这样的机缘巧合，意义非同寻常，因为宽容与哲学紧密相连。哲学受益于尊重、倾听和理解那些丰富着我们存在方式的多式多样的观点、理念与文化。同宽容一样，哲学也是一门在尊重彼此权利和共同价值的基础上共同生活的艺术。哲学还是一种以批判式眼光看世界的能力，这样的眼光因接纳他人的观点而更为敏锐，因思想、意识和信仰的自由而更为坚定。

世界哲学日

正因如此，哲学不仅仅是学校里的一门学科专业，也是有助于更好、更人道地生活的日常实践。哲学追问自幼形成，经过不断学习和完善，在推动公共辩论并捍卫人文主义方面发挥着根本性作用，而人文主义在当今世界被暴力和各种紧张局势冲击得七零八落。哲学不提供任何现成可用的答案，却为思考世界、探寻自我指引出永恒求索之路。在这条道路上，宽容既是一种道德品质，也是一种实用的对话手段。它与宣称一切均无对错的素朴相对主义毫不相干，它是对倾听的一种个人化要求，因为宽容建立在捍卫尊严和自由之普遍原则的坚定承诺之上，这种要求愈发强烈。

世界哲学日

教科文组织今年开展亚里士多德和莱布尼兹 *(1646-1716)* 的周年纪念活动，这两位杰出的哲学家都为形而上学和科学、逻辑学和伦理学的发展作出过贡献。他们虽然所处时代不同、文化背景迥异，却有一个共同点：将哲学置于公共生活的核心位置，作为有尊严的自由生活的根本要素。现在轮到我们来弘扬这一精神，勇于向自由、开放和宽容的思想敞开大门。以此对话为基础，我们可以在公民、社会和国家之间建立起更强有力的合作，作为和平的永久基石。”

——伊琳娜 · 博科娃 *(UNESCO Director-General)*

背景

实质蕴含与严格蕴含

$p \to q := \neg p \vee q$, 等价于$\neg(p \wedge \neg q)$. 实质蕴含 “怪论”:

- $p \to (q \to p)$
- $(p \to q) \vee (q \to r)$
- $\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$
- $(p \wedge \neg p) \to q$, $p \to (q \vee \neg q)$

如果意大利是法国的一部分的话, 罗马就在法国 (真?) vs.如果意大利是法国的一部分的话, 北京就在法国 (假?). 似乎有时候蕴含的真值不完全由前件及后件的真值决定!

C. I. Lewis (C. 刘): 严格蕴含 ($p \multimap q$): **不可能** p 真而 q 假. 等价的: **必然**若 p 真则 q 也真 (必然 $p \to q$). 不能完全解决上面的所有怪论, 但却引出了一个重要的新领域: 模态逻辑 (Modal Logic).

亚里士多德的模态三段论

Barbara 的 LXL 模态版本 (亚里士多德认为有效)

- All B are necessarily A,
- All C are B,
- therefore: All C are necessarily A.

Barbara 的 XLL 版本 (亚里士多德认为不有效):

- All B are A,
- All C are necessarily B,
- therefore: All C are necessarily A.

什么是“模态”

什么是 “模态”(MODALITY)

她有男朋友.

“她有男朋友” 为真的不同 “模式”(用模态词表达):

- 可能 她有男朋友.
- 过去 她有男朋友.
- 我知道 她有男朋友
- 她被允许 有男朋友.
- 她被证明 确实有男朋友
- 她在相亲 3 次之后 就有男朋友了.

什么是“模态”(MODALITY)

她有男朋友.

“她有男朋友”为真的不同“模式”(用模态词表达):

- 可能 她有男朋友. (基本模态逻辑)
- 过去 她有男朋友. (时态逻辑 Temporal Logic)
- 我知道 她有男朋友. (知识逻辑 Epistemic Logic)
- 她被允许 有男朋友. (道义逻辑 Deontic Logic)
- 她被证明 确实有男朋友. (可证性逻辑 Provability Logic)
- 她在相亲 3 次之后 就有男朋友了.(动态逻辑 Dynamic Logic)

可能世界语义

基本模态逻辑的语言

最基本的模态逻辑语言 ($p \in \mathsf{PV}$):

$$\varphi \quad ::= \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \Box\varphi$$

- $\Box$ 读 “Box”, 在基本的模态逻辑中代表 “必然”
- 可以定义 “可能 φ” 为 “并非必然并非 φ” ($\neg\Box\neg\varphi$), 记做 $\Diamond\varphi$, 读作 “Diamond”. “钻石是并非永远并非”
- 不同领域也把 $\Box$ 写成不同的东西: $\mathcal{K}$ (知识), $\mathcal{B}$ (信念), G (永远), O (义务), $[\pi]$ (程序 π 保证)....

$\Box p$ 的真值不完全由 p 的真值决定: $\Box$ 并不是 $\neg$ 这样的一元逻辑连接词.

可能世界语义 (POSSIBLE WORLD SEMANTICS)

一个克里普克模型 (Kripke Model) $\mathcal{M}$ 由三个东西组成 $\langle W, R, V\rangle$:

- W 是一个非空集合 (一堆可能世界或者可能的状态).
- R 是 W 上的一个可达关系 (accessibility relation) (wRv 表示如果现实世界是 w 那么 v 是它的一个可能的替代世界)
- $V: W \to 2^{\mathrm{PV}}$ 确定每个可能世界上哪些基本命题为真哪些为假.

满足关系 $\vDash$ 定义在点模型(pointed model) 上 $\mathcal{M}, w$ (模型 + 一个“真实世界”), 只有在确定一个世界后才能完全确定所有公式的真假:

$$
\boxed{
\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \vDash p & \Leftrightarrow & p \in V(w) \\
\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \nvDash \varphi \\
\mathcal{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ 且} \mathcal{M}, w \vDash \psi \\
\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi & \Leftrightarrow & \text{对所有的} v, \text{ 如果} wRv \text{ 则} \mathcal{M}, v \vDash \varphi
\end{array}
}
$$

例子

$\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\neg\varphi \iff$ 存在$v : wRv$ 且$\mathcal{M}, v \vDash \varphi$

$\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Diamond\neg\varphi$

$\mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \Diamond\neg\varphi$ $\mathcal{M}, w \vDash \Box\neg\varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \neg\Diamond\varphi$

考虑如下模型中哪些地方 $\Box\Diamond p$ 为真? 哪些地方 $\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Box p$ 为真?

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[d] & \{p\} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{q\} \arrow[r] & \{p, q\}
\end{tikzcd}$$

$\Box(p \to q)$ 和 $p \to \Box q$ 呢? “你只吃了 1 个馒头则必然你吃的馒头少于 2 个” 这句话应该用哪个模态逻辑公式表示?

模态逻辑的语义也可以游戏化 (回忆命题逻辑的语义游戏)

给定一个对于基本命题变元的赋值 V, 和一个公式 φ, 定义一个语义游戏 $G_{V,\varphi}$:

- 游戏者: 支持者 (**P**roponent) 和反对者 (**O**pponent)
- 游戏的状态: φ 及其子公式
- 游戏的规则:
  - P 首先断言公式 φ (在 V 上是真的)
  - 如果当前公式是 $\psi \vee \psi'$ 则 P 可以选择 ψ 或 ψ 其中一个继续
  - 如果当前公式是 $\neg\psi$ 则 P 和 O 的角色互换 从 ψ 继续
- 游戏的输赢条件: 状态是 $p \in \mathbf{PV}$, 若 $V(p) = 1$ 则 (当前的)P 赢, 反之则 (当前的)O 赢.

这种游戏符合 Zemelo 定理的要求, 肯定有一个玩家有必胜策略.

给定点模型M,W 和 φ 我们可以玩一个游戏

- 游戏者: 支持者 (Proponent) 和反对者 (Opponent)
- 游戏的状态 $\langle v, \psi \rangle$, 其中 v 在 $\mathcal{M}$ 中, ψ 是 φ 的子公式, 初始状态是 $\langle w, \varphi \rangle$.
- 游戏的规则:
  - P 首先断言公式 φ 在 $\mathcal{M}, w$ 上是真的.
  - 如果当前公式是 $\psi \vee \psi'$ 则 P 可以选择 ψ 或 ψ 其中一个继续
  - 如果当前公式是 $\neg\psi$ 则 P 和 O 的角色互换从 ψ 继续
  - 如果当前公式是 $\Box\psi$ 则 O 选择一个 v' 使得 vRv', 并且改变游戏状态为 $\langle v', \psi \rangle$ 继续.
- 游戏的输赢条件: 状态是 $p \in \mathbf{PV}$, 若 $V(p) = 1$ 则 (当前的)P 赢, 反之则 (当前的)O 赢.

可以证明: $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \iff$ 在相应的游戏里 P 有一个必胜策略.

克里普克模型是一种关系模型

关系模型可以用来刻画各种各样的东西, 例如:

- 理论计算机: 状态转换系统 (labelled transition systems).
- 博弈论: 扩展博弈树 (extensive-form games).
- 语言学: 句法结构树 (parsing trees).

有效性 (VALIDITY) 和框架 (FRAME): 不同层次的有效性

框架: 没有赋值函数 V 的模型 $\langle W, R\rangle$ (模型的骨架). 我们希望逻辑真理与基本命题的内容无关, 所以可以考虑框架上有效的公式.

记法 (用 $\mathcal{F}$ 表示框架, 用 $\mathbb{C}$ 表示某些框架的类):

记法	定义	说法
$\mathcal{M}, w \vDash \varphi$		φ 在点模型 $\mathcal{M}, w$ 上为真
$\mathcal{M} \vDash \varphi$	对所有 w: $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$	φ 在模型 $\mathcal{M}$ 上有效
$\mathcal{F}, w \vDash \varphi$	对所有 V: $\mathcal{F}, V, w \vDash \varphi$	φ 在点框架 $\mathcal{F}, w$ 上有效
$\mathcal{F} \vDash \varphi$	对所有 V, 所有 w: $\mathcal{F}, V, w \vDash \varphi$	φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效
$\mathbb{C} \vDash \varphi$	对所有 $\mathbb{C}$ 中的框架 $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \vDash \varphi$	φ 在 $\mathbb{C}$ 上有效
$\vDash \varphi$	对所有框架 $\mathcal{F} \vDash \varphi$	φ 有效

实质蕴含与严格蕴含

令 $\varphi \prec \psi$ 为 $\Box(\varphi \to \psi)$ 实质蕴含 "怪论" 是否对严格蕴含也成立?

- $p \prec (q \prec p)$ 不有效
- $(p \prec q) \vee (q \prec r)$ 不有效
- $\neg(p \prec q) \prec (p \wedge \neg q)$不有效
- $(p \wedge \neg p) \prec q$, $p \prec (q \vee \neg q)$ 还是有效的...

相干逻辑 (Relevance Logic) 可以更进一步的处理这些怪论 (要求前件和后件有语形的关系).

公理及证明系统们

K 系统: 基本公理和规则

K 公理 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

NEC 从 φ 得到 $\Box\varphi$ (必然化规则).

TAUT 命题逻辑的公理.

MP 从 $\varphi \to \psi$ 及 φ 得到 ψ.

可靠性和完全性:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi$$

$\Gamma \vDash \varphi$ 定义为对任何的点模型如果 $\mathcal{M}, w \vDash \Gamma$ 则 $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$.

完全性证明: 还是对每个一致的公式集造个模型出来: 用所有极大一致集作为可能世界, 在它们之间用语形的信息构造 R 关系: $\Gamma R \Delta \iff$ 对所有 $\Box\varphi \in \Gamma$ 都有 $\varphi \in \Delta$.

模态逻辑的一些重要公理 (可把 p 换成任意 φ 变成公理模式)

同一个公式在不同的模态解释下会有不同意义, 下面只是列举一些.

- T $\Box p \to p$ 必然的都是真的
- B $p \to \Box\Diamond p$ ($p \to \Box\neg\Box\neg p$) 来源于布劳威尔 (Brouwer)
- D $\Box p \to \Diamond p$ 来源于道义逻辑 (Ought implies can)
- 4 $\Box p \to \Box\Box p$ 永远意味着永远永远
- 5 $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ 你知道你不知道什么
- L $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ Löb 定理的模态形式 (可证性逻辑)
- .3 $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p)$ 未来不分叉

框架及其性质

我们说公理 φ 对应于框架性质 X 如果对任意框架 $\mathcal{F}$:

φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效 $\iff$ $\mathcal{F}$ 有性质 X:

- T $\Box p \to p$ 自反性 (Reflexivity): 任意 x, xRx
- B $p \to \Box\Diamond p$ 对称性 (Symmetry): 任意 x, y, 若 xRy 则 yRx
- D $\Box p \to \Diamond p$ 序列性 (Seriality): 任意 x, 存在 y 使得 xRy
- 4 $\Box p \to \Box\Box p$ 传递性 (Transitivity) 任意 xyz, 若 xRy 且 yRz 则 xRz
- 5 $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ 欧几里得性 (Euclidean property) 任意 xyz 若 xRy 且 xRz 则 yRz 来源于《几何原本》: *things which equal the same thing also equal one another.*

不同的证明系统

基于不同的公理有不同的证明系统:

KB 系统 **K**+B 公理模式

S4 : **K**+T+4

S5 : **K**+T+4+5=**K**+T+5=**K**+T+B+4 (推理能力一样)

对相应框架类上的有效式可得到一系列完全性结果. 例如, 令 $\mathbb{C}_{ref,trans}$ 为自反传递框架的类, 我们有:

$$\Gamma \vDash_{\mathbb{C}_{ref,trans}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{S4} \varphi$$

在完全性证明中, 还是造模型, 但是要保证造出来的模型的框架在我们想要的类里面 (具有我们想要的性质), 可以用公理去做这一点,

一个模态系统可以对应不同的框架类完全

反对称 (anti-symmetry): 对任意 x,y: 如果 xRy 且 yRx 则有 $x = y$.

S4 系统 (K+T+4) 对于自反传递 + 反对称的框架类也是可靠完全的.

$$\Gamma \vDash_{\mathbb{C}_{ref,trans,antisym}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{S4} \varphi$$

对比刚才的结果 $\mathbb{C}_{ref,trans,antisym} \subseteq \mathbb{C}_{ref,trans}$, 完全性证明更困难了!

其实, 反对称的性质是不能被模态所定义的 (没有一个模态公式与之相对应)! 下节课告诉大家为什么.