现代视角下的三段论 (片段)

哲学数学计算机中的逻辑课

王彦晶
北大哲学系

2016 年 9 月 29 日

记号

形式语言 (Formal Language)

形式语义 (Semantics)

可靠性 (Soundness) 与完全性 (Completeness)

记号

集合相关的一些记号

- 集合 (Set): { 亚里士多德, 马云 }, $\{x \mid x$ 不戴眼镜且是中国人 $\}$
- $x \in X$: x 属于集合 X 表示 x 是 X 的一个元素
- $X \subseteq Y$: 集合 X 是 Y 的子集 (subset), 表示 X 里的元素都是 Y 的元素
- $X \cap Y$ 集合 X 与 Y 的交集 (intersection): 既属于 X 又属于 Y 的元素的集合
- $\mathcal{P}(X)$ (幂集 Power Set): X 所有子集的集合 (包括空集).

形式语言 (FORMAL LANGUAGE)

一个超简单的形式语言 l_{all}

给定一些符号 $S = \{A, B, C, D, \ldots\}$, 令 L_{all} 为包含所有形如下面这样的句子 $(X, Y \in S)$ 的集合:

- All X are Y

这里一个 "语言" 是符合上面这个 "语法" 的句子的集合. 直观上, 下面的推理应该是靠谱的 (对任意 $X, Y \in S$ 来说):

$$\frac{\text{All } X \text{ are } Y \qquad \text{All } Y \text{ are } Z}{\text{All } X \text{ are } Z}\ \text{Trans} \qquad\qquad \frac{}{\text{All } X \text{ are } X}\ \text{Id}$$

我们也把没前提的规则叫公理.

把这两个组成的推理系统叫做 Sys_{all}.

推演与证明 (前提集为空)

我们关心这样 “靠谱” 的规则能在一定前提下 “推出” 什么句子.

假设给定前提集:

$\Gamma = \{$All A are B, All B are C, All C are B, All C are $D\}$

$$\dfrac{\text{All } B \text{ are } C \qquad \text{All } C \text{ are } B}{\text{All } B \text{ are } B}\ (\text{Trans})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{All } A \text{ are } B \qquad \text{All } B \text{ are } C}{\text{All } A \text{ are } C}\ (\text{Trans}) \qquad \text{All } C \text{ are } D}{\text{All } A \text{ are } D}\ (\text{Trans})$$

$\Gamma \vdash \alpha$ (Γ 能推出 α) 当且仅当 存在一个有穷推理树使得树根是 α, 叶子都在 Γ 里出现或是公理, 树枝靠规则 “连接”.

推演与证明

$$\dfrac{\dfrac{\text{All } A \text{ are } B \qquad \text{All } B \text{ are } C}{\text{All } A \text{ are } C}\,(\text{Trans}) \qquad \text{All } C \text{ are } D}{\text{All } A \text{ are } D}\,(\text{Trans})$$

大家也许更熟悉把推演写成线性的形式 (括号里是写这行的原因):

1. All A are B (Γ)
2. All B are C (Γ)
3. All A are C (Trans (1)(2))
4. All C are D (Γ)
5. All A are D (Trans (3)(4))

$\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当 存在以 α 结尾的有穷序列使得序列里的句子或者是公理或者在 Γ 里再或者由前面已有的通过系统的规则得到.

否定性结果, 怎么证在给定前提下这个系统里推不出来什么?

形式语义 (SEMANTICS)

句子的真假和事实的情况有关系, 用数学模型代表这些情况.

一个模型由两部分组成 $\mathcal{M} = \langle O, I \rangle$:

- O 是一个集合 e.g., 所有人的集合
- $I : S \to \mathcal{P}(O)$ 是一个解释函数, 把每个 S 里面的概念符号解释成一个 O 的子集, e.g., $I($ 男人 $) = \{$ 张三, 李四, 王五 $\}$

下面定义句子在什么模型上是真的 ($\mathcal{M}$ 满足All X are Y):

$$\boxed{\mathcal{M} \vDash \text{All } X \text{ are } Y \quad \text{当且仅当} \quad I(X) \subseteq I(Y)}$$

$\Gamma \vDash \alpha$ 当且仅当 对任意模型 $\mathcal{M}$ 如果 $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ 则 $\mathcal{M} \vDash \alpha$.

这时称 α 是 Γ 的语义后承 (任何情况下 Γ 真则 α 真, 从 Γ 得到 α 是有效的).

可靠性（SOUNDNESS）与完全性（COMPLETENESS）

可靠性与完全性

注意: $\vdash$ 与 $\vDash$ 的定义很不一样.

可靠性: 能推出来的都是有效的 ($\vdash \Longrightarrow \vDash$)

对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vdash \alpha$ 则 $\Gamma \vDash \alpha$

完全性: 有效的都能推出来 ($\vDash \Longrightarrow \vdash$)

对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$

我们希望:

可靠且完全

对任意 Γ 和 α, $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当 $\Gamma \vDash \alpha$

特别的, 有了可靠性, $\Gamma \nvDash \alpha \Longrightarrow \Gamma \nvdash \alpha$, 找反模型即可 (简单)!

可靠性: 对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vdash \alpha$ 则 $\Gamma \vDash \alpha$

考虑线性表示的证明, 假设 $\Gamma \vdash \alpha$, 可以考虑对证明的长度做归纳:

- 长度为 1 则 $\alpha \in \Gamma$ 或者 α 具有形式 All *X* are *X*. 易得 $\Gamma \vDash \alpha$.
- 归纳假设: 假设长度为 k 的证明都有 $\Gamma \vDash \alpha$
- 证明长度为 k+1: 下一步的情况也只有三种, 前两种和上面的情况一样, 第三种是最后一步是由应用规则 Trans 实现, 比如:
  - ..... 很多步
  - All *A* are *B* (Γ)
  - ..... 很多步
  - All *B* are *C* (Γ)
  - ..... 很多步
  - All *A* are *C* (Trans)

由归纳假设 $\Gamma \vDash$ All *A* are *B*, All *B* are *C*, 由语义 $\Gamma \vDash$ All *A* are *C*.

本质上要证: 公理有效, 规则保持有效性

完全性: 对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \models \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$

任给 Γ, 用语形的东西造一个特殊的模型 $\mathcal{M}^{\Gamma}$, 使得在这个模里 Γ 都成立, 而且如果 $\mathcal{M}^{c} \models \alpha$ 则有 $\Gamma \vdash \alpha$ (不用造具体证明).

$\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle O, I \rangle$:

- $O = S$ (符号集)
- 对每个 $X \in S$, 令 $I(X) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } X\}$

下面我们证明:

1. $\mathcal{M}^{\Gamma} \models \Gamma$.
2. 如果 $\mathcal{M}^{\Gamma} \models \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$.

完全性: 对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$

$\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle S, I \rangle$:

- 对每个 $X \in S$, 令 $I(X) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } X\}$

下面我们证明:

1. $\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash \Gamma$. 回忆: All X are Y 为真 当且仅当 $I(X) \subseteq I(Y)$

任给 All A are $B \in \Gamma$, $I(A) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } A\}$
$I(B) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } B\}$. 我们要证明 $I(A) \subseteq I(B)$

用 Trans 的规则可得!

完全性: 对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$

$\mathcal{M}^\Gamma = \langle O, I \rangle$:

- $O = S$ (符号集)
- 对每个 $X \in S$, 令 $I(X) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } X\}$

下面我们证明:

2. 如果 $\mathcal{M}^\Gamma \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$.

任给 α=All A are B, 如果 $\mathcal{M}^\Gamma \vDash \alpha$ 则按语义有 $I(A) \subseteq I(B)$ 即 $\{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } A\} \subseteq \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } B\}$.

用 Id, 我们有 $\Gamma \vdash$ All A are A, 所以 $A \in I(A)$, 所以 $A \in I(B)$, 因而 $\Gamma \vdash$ All A are B.

完全性: 对任意 Γ 和 α, 如果 $\Gamma \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$

任给 Γ, 用语形的东西造一个特殊的模型 $\mathcal{M}^{\Gamma}$, 使得在这个模里 Γ 都成立, 而且如果 $\mathcal{M}^{c} \vDash \alpha$ 则有 $\Gamma \vdash \alpha$.

$\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle O, I \rangle$:

- $O = S$ (符号集)
- 对每个 $X \in S$, 令 $I(X) = \{Y \mid \Gamma \vdash \text{All } Y \text{ are } X\}$

我们已经证明:

1. $\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash \Gamma$.
2. 如果 $\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash \alpha$ 则 $\Gamma \vdash \alpha$.

假设 $\Gamma \vDash \alpha$ 则有 1 有 $\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash \alpha$, 由 2 有 $\Gamma \vdash \alpha$. 证毕.

另一个简单的语言 l_{some}

给定一些符号的集合 $S = \{A, B, C, D, \ldots\}$, 另 L_{some} 为包含所有形如下面这样的句子 $(X, Y \in S)$ 的集合:

- Some X is Y

$$\boxed{\mathcal{M} \vDash \text{Some } X \text{ is } Y \quad \text{当且仅当} \quad I(X) \cap I(Y) \neq \emptyset}$$

$$\frac{\text{Some } A \text{ is } B}{\text{Some } B \text{ is } A}\ \text{Symm} \qquad\qquad \frac{\text{Some } A \text{ is } B}{\text{Some } A \text{ is } A}\ \text{Ex}$$

开始有意思了 $l_{all,some}$

给定一些符号的集合 $S = \{A, B, C, D, \ldots\}$, 另 L_{some} 为包含所有形如下面这样的句子 $(X, Y \in S)$ 的集合:

- All X is Y
- Some X is Y

这两种句子怎么交互?

$$\frac{\text{Some } A \text{ is } B \qquad \text{All } B \text{ are } C}{\text{Some } A \text{ is } C} \; (?)$$