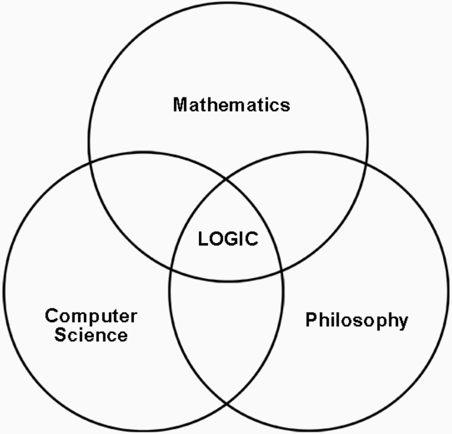
哲学、数学、计算机中的逻辑学

Logic in Philosophy, Math, and Computer Science

王彦晶
北大哲学系
www.wangyanjing.com

2019 年 6 月 23 日 数理哲学周公众报告

作为数理哲学的重要工具之一, 逻辑学和哲学, 数学, 计算机 (还有语言学) 有着不解之缘.



一个旁证

逻辑学家通常分布在哲学、数学、计算机的院系.

他们常被认为是:

- 哲学系的数学家
- 数学系的计算机科学家
- 计算机系的哲学家

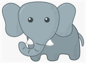
难以把握的全貌

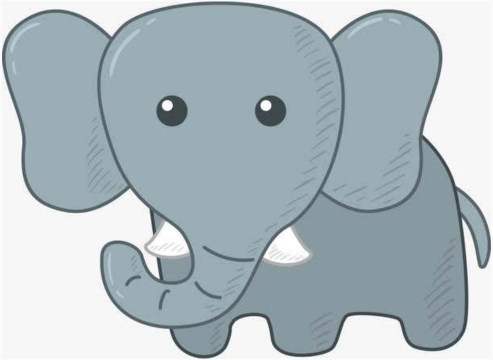
不同背景的逻辑学家对于逻辑学的范围和理解也会有所不同，动机也不一样。

图片来源：https://kknews.cc/news/pq4oqaj.html

一学期的课程：https://www.phil.pku.edu.cn/personal/wangyj/Teaching/Delta16.html

本次报告的计划





逻辑学是干什么的?

哲学数学计算机与模态逻辑

现代逻辑学分支概貌

结语

逻辑学是干什么的?

逻辑学研究啥?

大家几乎天天都在说“逻辑”，一般也没人愿意承认自己逻辑不好, 但是作为学科它是研究什么的?

逻辑学一般不研究:

- × 通俗的规律、机制、思维方式：市场逻辑、强盗逻辑...
- × 辩论技巧：预设结论，目标是说服, 大量修辞, 共情技巧.
- × 批判性思维：其中一部分涉及一些逻辑谬误的避免
- × 侦探的推理：“他是刚从热带回来，因为他脸色黝黑，但是，从他手腕的皮肤黑白分明看来，这并不是他原来的肤色。他面容憔悴，这就清楚地说明他是久病初愈而又历尽了艰苦。他左臂受过伤，现在动作品来还有些僵硬不便。试问，一个英国的军医在热带地方历尽艰苦，并且臂部负过伤，这能在什么地方呢？自然只有在阿富汗了。”

逻辑学研究什么?

- 通俗的说: 研究“靠谱”的推理形式
- 具体推理:

$$\frac{\text{所有人都是好奇的} \qquad \text{王彦晶是人}}{\text{王彦晶是好奇的}}$$

- 推理形式

$$\frac{\text{所有A都是B} \qquad \text{a是A}}{\text{a是B}}$$

- 用形式语言表达的推理形式

$$\frac{\forall x(A(x) \to B(x)) \qquad A(a)}{B(a)}$$

写成形式语言的公式: $(\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge A(a)) \to B(a)$

逻辑学研究什么?

- 推理形式那么多, 哪些推理形式是 “靠谱” 的呢?
- 简单说就是保真(true): 如果前提真则保证结论真, 我们把这样的推理形式叫做有效的 (valid). 就像密封的水管，干净水进去的话流出来的也是干净水。你往水管里放脏水，那不能赖水管了。。。

看上去应该保真的推理形式...

$$\frac{\text{A is better than B} \qquad \text{B is better than C}}{\text{A is better than C}}$$

看上去是靠谱的, 但是...

- Philosophy is better than nothing.
- Nothing is better than Money.
- Therefore: Philosophy is better than Money!

自然语言有歧义, 所以我们要使用清晰的形式语言, 并避免歧义, 确定一句话什么时候真，什么时候假。

通俗的原始图景

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然语言:} \arrow[d, "\text{精确化}"] & \text{句子} & & \text{句子} \\
\text{形式语言:} \arrow[d, dash, "\text{真值语义}"] & \text{公式} \arrow[rr, "\text{推理系统 }(\vdash)"] \arrow[d, dash, "\text{语义}"] & & \text{公式} \arrow[d, dash, "\text{语义}"] \\
\text{模型:} & \text{性质} \arrow[rr, "\text{包含 }(\vDash)"] & & \text{性质} \\
\text{世界:} \arrow[u, "\text{抽象化}"] & \text{事实} & & \text{事实}
\end{tikzcd}
$$

- 形式语言: e.g., $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$...
- 模型: 一些特定类别的数学结构
- 语义: 什么公式在什么模型上为真

一个命题逻辑的推理系统

我们希望: 所有语义上有效的推理模式都能通过几条简单的公理和规则纯形式地推出来, 所有纯形式地推出来的也都是在语义上有效的.

对于只包含经典的 $\neg$ (negation), $\to$ (implication) 的靠谱 (保真) 的推理模式都可以用以下这三条公理模式和规则推出来.

公理模式:

A1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

A2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

A3 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

分离规则 (Modus Ponens): 从 $\varphi \to \psi$ 以及 φ 可得 ψ

校友评价

冯友兰评价金岳霖："我们俩互有短长。他的长处是能把很简单的事情说得很复杂；我的长处是能把很复杂的事情说得很简单。"

证明 $\varphi \to \varphi$:

1. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ A1 特例
2. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ A2
3. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ MP(1, 2)
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ A1
5. $\varphi \to \varphi$ MP (3, 4)

用显微镜看推理, 精确意义上的靠谱，不积跬步无以至千里. （通常来讲）优势是对就是对，"劣势" 是错就是错.

逻辑学家的操心是多余的么?

不多余的操心：逻辑学的发展历程

- 起源于哲学：亚里士多德... (论证的工具)
- 成熟于数学：布尔、弗雷格、哥德尔 (研究数学的数学)
- 繁荣于计算机科学：图灵... (计算机的 “微积分”)
- 输出工具到语言学、法学、博弈论等
- 反过来逻辑技术继续促进 (分析) 哲学的发展: 清晰概念, 严格论证, 澄清假设, 探求推论, 保持一致 (无矛盾)

不光是刻画这些领域里相关的推理，更是用它们做事。很多情况下不那么关心系统内的具体定理，而更关心形式语言、证明系统和模型的元性质（metatheorem）。

不多余的操心：三次数学危机

- 第一次: 无理数的发现
- 第二次: 微积分的基础
- 第三次: 罗素悖论

数学需要坚实的基础，除了纯逻辑的公理和规则（用来确保证明的严格性）还需要关于基本数学概念的假设。

严格基础带来证明的边界

使用形式语言描述关于集合的基本假设：公理化的集合论 ZFC

Extensionality	$\forall x \forall y (x \approx y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$
Paring	$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w \approx x \vee w \approx y)$
Union	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w))$
Empty set	$\exists x \forall y (\neg y \in x)$
Infinity	$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in X \to y \cup \{y\} \in x))$
Power set	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \to w \in x))$
Replacement	$\forall x \in y \exists ! z R(x,z) \to \exists w \forall v (v \in w \leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge R(x,v))$
Regularity	$\forall x (\neg x \approx \emptyset \to \exists y \in x (x \cap y \approx \emptyset))$
Choice	$\forall x ((\neg \emptyset \in x \wedge \forall y, z \in x (\neg y \approx z \to y \cap z \approx \emptyset))$
	$\to \exists y \forall z \in x \exists ! w \in z (z \in y)))$

哥德尔: 足够强的一致的数学系统不能证明自身的一致性.

无穷也是有大小的，有没有什么无穷比自然数的无穷大而比实数的无穷小？这个问题独立于 ZFC (哥德尔 +Cohen).

关于数学基础和证明的限度

相关报告

杨睿之老师的报告：

（接下来）Foundation of Mathematics and the Reducts of the Set-theoretical Universe

俞珺华老师的报告：

（周二下午 B114）Provability Logic and Logic of Proofs

数学基础与数学哲学的专题讨论：

（周一双创中心）刘壮虎、邢滔滔、杨睿之、叶峰老师

罗素悖论直接推动了公理化集合论的发展，说谎者悖论启发了哥德尔的不完备定理的想法. “这句话是假的” 到底是真是假?

相关报告

文兰院士的报告:

(今天晚上 1 号楼 108) From a ”Three cards paradox” to the Liar paradox

熊明老师的报告:

(周一下午 2 号楼 B114) Paradoxes and Revision theory of truth

There are those who think that clarity, because it is difficult and rare, should be suspect. The rejection of this view has been the deepest impulse in all my philosophical work.

—Bertrand Russell

与清晰性较劲的人生：不懂数学的哲学家不是好作家。

德先生和赛先生的朋友逻先生也很重要

观点不同打一架还是?

- “精炼我们的推理的唯一方式是使它们同数学一样切实，这样我们能一眼就找出我们的错误，并且在人们有争议的时候，我们可以简单的说：让我们来算算吧。而无须进一步的忙乱，就能看出谁是正确的” –莱布尼兹

如何用逻辑学的方法分析更一般的哲学概念?

例如：必然、知识、永恒，因果等等...

哲学理论是否也可以像数学一样用公理和推演规则试图去刻画?

这又和计算机有何关系?

哲学数学计算机与模态逻辑

模态逻辑 (MODAL LOGIC)

什么是 “模态”(Modality)?

考虑一个命题: 她有男朋友.

“她有男朋友” 为真的不同 “模式”(用模态词表达):

- 可能 她有男朋友.
- 过去 她有男朋友.
- 我知道 她有男朋友
- 她被允许 有男朋友.
- 她在相亲 3 次之后 就有男朋友了.

模态逻辑 (MODAL LOGIC)

什么是 “模态”(Modality)?

她有男朋友.

“她有男朋友” 为真的不同 “模式”(用模态词表达):

- 可能 她有男朋友. (基本模态逻辑)
- 过去 她有男朋友. (时态逻辑 Temporal Logic)
- 我知道 她有男朋友. (知识逻辑 Epistemic Logic)
- 她被允许 有男朋友. (道义逻辑 Deontic Logic)
- 她在相亲 3 次之后 就有男朋友了.(动态逻辑 Dynamic Logic)

模态逻辑优势: 语言简单直观, 模型应用广泛, 有好的计算性质.

对偶性：模态词经常成对出现

模态词与量词（所有/存在）之间有一些相似的性质：

所有 $\forall$	存在 $\exists$	$\forall x = \neg\exists x \neg$	$\neg\forall x = \exists x \neg$
必然 $\Box$	可能 $\Diamond$	$\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$	$\neg\Box\varphi = \Diamond\neg\varphi$
必须 $\Box$	允许 $\Diamond$		
永远 $\Box$	有时 $\Diamond$		
知道 $\Box$	(认为) 可能 $\Diamond$		

形式语言里可以包含各种模态词嵌套的复杂公式, e.g.,
$\Box(p \to \Diamond\neg p)$, $\Box_1\Box_2 p \wedge \Box_1\neg\Box_2\Box_1\Box_2 p$.

回顾

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然语言:} \arrow[d, "\text{精确化}"] & \text{句子} & & \text{句子} \\
\text{形式语言:} \arrow[d, dash, "\text{真值语义}"] & \text{公式} \arrow[rr, "\text{推理系统 } (\vdash)"] \arrow[d, dash, "\text{语义}"] & & \text{公式} \arrow[d, dash, "\text{语义}"] \\
\text{模型:} & \text{性质} \arrow[rr, "\text{包含 } (\vDash)"] & & \text{性质} \\
\text{世界:} \arrow[u, "\text{抽象化}"] & \text{事实} & & \text{事实}
\end{tikzcd}
$$

模型和语义

一个克里普克模型 (Kripke Model) 由三个东西组成 $\langle W, R, V\rangle$:

- W 是一些可能世界 (possible worlds) 的集合.
- R 是 W 上的一个可达关系 (accessibility relation) (wRv 表示如果现实世界是 w 那么 v 是它的一个可能的替代世界).
- V 用来确定每个可能世界上哪些基本命题为真哪些为假.

$\Box\varphi$ 在一个世界 w 上为真当且仅当在所有和 w"连着" 的世界上 φ 都是真的. 必然的就是所有替代可能性上都成立的.

$$\begin{tikzcd} & p \\ w \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \neg p \end{tikzcd}$$

其他模态词的语义很多情况下也可以用类似的方式定义.

关于不同的模态会有不同的直观假设

T	$\Box p \to p$	必然的都是真的
D	$\Box p \to \Diamond p$	来源于道义逻辑, 也可用于刻画信念
4	$\Box p \to \Box\Box p$	永远意味着永远永远
5	$\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$	你不相信什么你就相信你不相信什么
L	$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	Löb 定理的模态形式 (可证性逻辑)

不同的公理对应了数学结构的不同性质

- T $\Box p \to p$ 自反性: 任意 x, xRx
- D $\Box p \to \Diamond p$ 持续性: 任意 x, 存在 y 使得 xRy
- 4 $\Box p \to \Box\Box p$ 传递性：任意 xyz, 若 xRy 且 yRz 则 xRz
- 5 $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ 欧几里得性：任意 xyz 若 xRy 且 xRz 则 yRz
  来源于《几何原本》: *things which equal the same thing also equal one another.*
- L $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 传递且没有无穷路径.

有时候先有直观的公理，有时候先有直观的语义性质。

例子中的例子: 知识逻辑 (Epistemic Logic)

为了好读，在知识逻辑的语境下也把 $\Box$ 写成 $\mathcal{K}_i$, i 是主体。

最强的假设：关系是 (带主体角标) 等价关系，满足自反、传递、对称的性质, 可以叫做 “不可区分关系”。

$\mathcal{K}_i\varphi$ 在 w 上成立当且仅当 i 不可区分的世界上 φ 都成立。

例如, 假设纽约确实在下雨 (p), 但 1 不知道, 不过 1 知道 2 知道纽约是否在下雨 (因为 2 住在纽约)…

$$\begin{tikzcd}
\underline{w : p} \arrow[loop above, "{1,2}"] \arrow[rr, leftrightarrow, "1" description] & & v \arrow[loop above, "{1,2}"]
\end{tikzcd}$$

$w \vDash p \wedge \neg\mathcal{K}_1 p \wedge \mathcal{K}_2 p \wedge \mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2 p \vee \mathcal{K}_2\neg p) \wedge \mathcal{K}_2\neg\mathcal{K}_1 p \wedge \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\neg\mathcal{K}_1 p.$

最强的知识推理系统 s5

公理模式		推理规则	
TAUT	命题重言式	MP	$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$
K	$\mathcal{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\psi)$	NECK	$\dfrac{\varphi}{\mathcal{K}_i\varphi}$
T	$\mathcal{K}_i\varphi \to \varphi$		
4	$\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\mathcal{K}_i\varphi$		
5	$\neg\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\neg\mathcal{K}_i\varphi$		

如何理解这几条公理:

- 4, 5: 正负自省公理 (Introspection axioms).
- T: 理想的知识应该是真的.

知之为知之，不知为不知，是知也

可以解释一些直观上的悖论, 比如 Moore“悖论”:

一个人似乎不能说 “天在下雨, 而我不知道/相信天在下雨” (假设一个人的断言是他知道或相信的).

可以证明 $\mathcal{K}(p \wedge \neg\mathcal{K}p)$ 是在有 T 公理的时候是能推出矛盾的, 在没有 T 但有 D 公理和正自省 (4) 公理的时候, 也能推出矛盾.

这也意味着不是所有真的都可知...

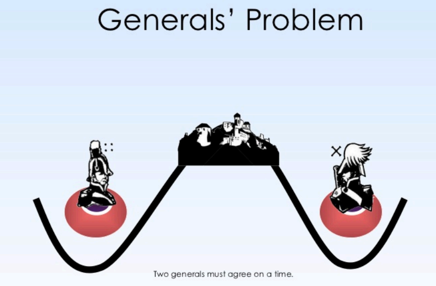
同时也引发了大量哲学与技术交织讨论.

- 逻辑全知性问题 (既是哲学问题也是技术问题)
- 正负自省问题 (特别是和信念结合讨论的时候)

例如, Hintikka 认同正自省, 但不认同负自省.

从个体到群体

- 分布式知识 (distributed knowledge) 互联网的优势
- 公共知识 (common knowledge)
    - 所有人都知道, 所有人都知道所有人都知道, 所有人都.....
    - David Lewis: *Convention*
    - 是可以严格表达和推理的: 公共知识 $C\varphi$ 在 w 成立当且仅当所有 w 能通达到的点上 φ 成立. 有相应的公理刻画推理.



知识逻辑 (EPISTEMIC LOGIC) 的发展历史

- 中世纪哲学家
- von Wright 1951, Hintikka 1962. 知识/信念逻辑的公理, 语义的开创性研究, 把知识与主体结合起来讨论.
- Aumann: 独立在博弈的角度下发现知识模型, 独立提出并应用公共知识知识的 (可计算的) 形式定义.
- McCarthy: 人工智能早期尝试, 推广知识谜题, 推广应用逻辑.
- Halpern 及合作者: 从人到机器的知识, 分布式系统中的应用, 与时态逻辑的结合, 构造式知识, 计算基础, 知识逻辑的重要推力量.
- Plaza, Gebrandy, Baltag, van Benthem 等人: 动态转向.

目前的交叉应用

- 理论计算机：
    - 形式化验证
    - 密码逻辑
    - 安全协议设计
- AI 中:
    - 多主体系统
    - 知识表示与推理
    - 不确定性及多主体的自动规划
    - 自动推理
- 认知博弈论 (Epistemic Game Theory)
- 心理理论 (Theory of Mind) 实验设计与解释

Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK.org)
86 年第一次: Aumann, Hintikka, McCarthy, Stalnaker, Halpern, Vardi, Moses, Fagin, Dwok, Smullyan, Moore, Asher, Kamp, Levesque, Immerman, Plotkin, Ladner, Fischer....

对哲学讨论的启发

- 传统知识论：知识定义、证成、怀疑论.
- 用逻辑工具刻画知识论的不同理论, 比较, 考虑后果, 连接点: Justification Logic.

但更重要的是提出新的问题: 形式化知识论：

- 用各种形式化手段研究不确定性、知识更新、信念修正、经验学习、归纳、博弈... 从个体到群体到社交网络.
- 形式化手段：逻辑、概率论、博弈论、机器学习
- Hendricks, Kelly, Hájek, Hansson, van Benthem, Parikh, Halpern, Williamson ...
- Readings in Formal Epistemology, Springer 2016

类似语义的思想的应用

应用在表面上没有模态词的地方:

- 直觉主义逻辑的关系语义
- 反事实条件句与因果

相关活动

俞珺华老师的报告:

(周二下午 B114) Provability Logic and Logic of Proofs

杨仁杰老师的报告:

周二下午 (2 号楼 B114) Causal Inference: Philosophy, Math and Machine Learning

现代逻辑学分支概貌

逻辑学的主要分支

现代逻辑学都使用数学工具进行技术研究.

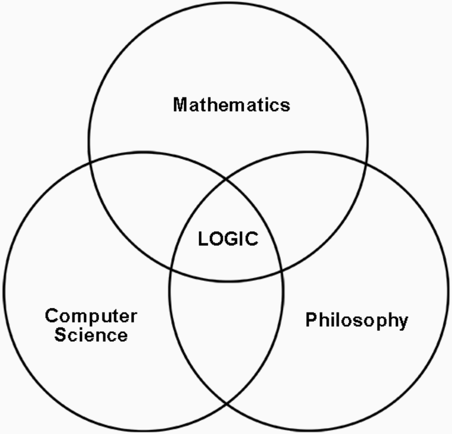
- 数理逻辑: 集合论, 模型论, 递归论 (可计算理论), 证明论, TACL(逻辑相关的拓扑, 代数和范畴论及类型论等)
- 计算机逻辑: 自动定理证明, 有穷模型论, 模型检测, 自动机理论, 可满足性判定, 逻辑程序, 计算复杂性, 程序设计语言的语义, 人工智能中的逻辑...
- 哲学逻辑: 模态逻辑, 非经典逻辑 (直觉主义, 多值, 弗协调, 非单调...), 逻辑哲学的技术性问题 (真理论, 逻辑性, 指称)...
- 其他领域: 语言学中的逻辑工具等

还有大量的交叉: 哲学逻辑中的模型论/证明论问题, 数理逻辑里的哲学逻辑问题, 哲学逻辑的计算及应用问题.

我们试图画出逻辑学的全貌:
https://shimo.im/mindmaps/fADiE5EaUU4EjNyB

结语

作为数理哲学的重要工具之一，给我们自由去研究各种抽象的概念，简洁的厘清哲学观点，并且很多可以被应用到相应的计算问题上，是哲学想法到应用的桥梁。



相关活动

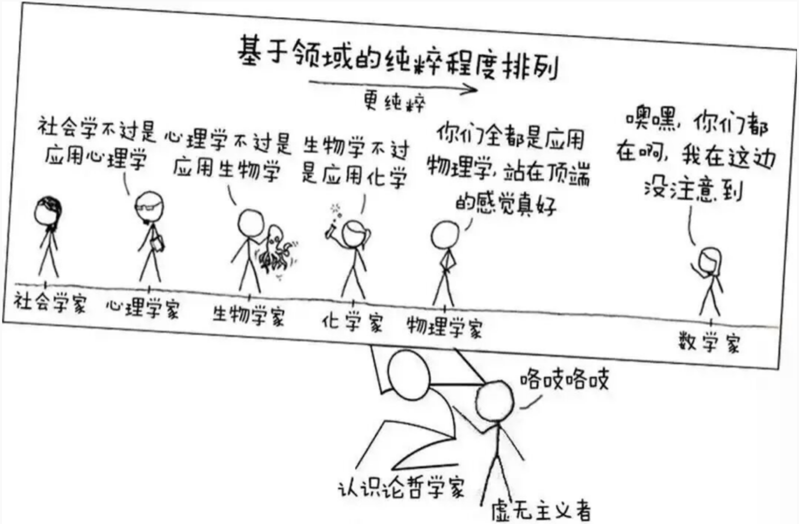
[周二上午] R.Ramanujam: Some questions for philosophy from the theory of computing

逻辑学与北大

- 严复（译《穆勒名学》，《名学浅说》）
- 胡适（哥伦比亚大学）
- 汪奠基（巴黎大学）
- 张申府（罗素铁粉）
- 金岳霖（哥伦比亚大学）
- 沈有鼎（哈佛、海德堡）
- 王宪钧（柏林、维也纳）
- 胡世华（维也纳、明斯特）
- 吴允曾（燕京大学哲学，数学，语言学）
- 马希文（力学，统计，计算机，语言学, 音乐）
- 康宏逵（翻译《这本书叫什么》《哥德尔》）
- ...

希望校内也有更多交叉合作。

减少隔膜，多点交流



理想主义者的最大敌人是其他理想主义者.

hintikka (1983)

> *I once read about a cannibal tribe in which nobody could become a chieftain without disposing of one of the earlier ones and eating him. It seems to me sometimes that philosophers must be descendants of that tribe. When a philosopher develops a new theory, it almost invariably seems more important to him to use it to try to clobber an earlier one rather than to try to see if the two are perhaps complementary - and to see what there is, perhaps, to be learned from the earlier theory.*

让我们有更多开放的心态。

Richard Dawkins:

“By all means let’s be open-minded, but not so open-minded that our brains drop out.”

-Let logic hold your brain!